CZU: 514.174

DESPRE TRANSFORMĂRILE PLANULUI CARE PĂSTREAZĂ ARIILE FIGURILOR

Conf. univ. dr. Pavel CHIRCU, ASEM
chircu.pavel@ase.md
ORCID: 0009-0004-4238-349X
DOI: https://doi.org/10.53486/econ.2024.127.059

În acest articol se studiază transformările planului de coordonate, care păstrează ariile figurilor cuadrabile mărginite. Astfel de transformări se numesc izoarice.

În primul rând, se arată că aria oricărei figuri cuadrabile mărginite este egală cu suma ariilor unei mulțimi, cel mult numărabile de anumite triunghiuri disjuncte două câte două și situate în această figură. Fiecare dintre aceste triunghiuri are o bază paralelă cu axa Ox. Este prezentat un exemplu de transformare izoarică, care nu este izometrică. În consecință, este dedusă formula pentru aria figurii mărginite de o elipsă, fără a utiliza calculul integral.

Transformările planului, examinate în prezentul articol, sunt esențiale atât pentru domeniul matematicii, cât și pentru domeniul economic.

Pentru o transformare netedă a planului de coordonate, o transformare reprezentată de două funcții cu două variabile, cu derivate parțiale de ordinul întâi continue pe întregul plan, se demonstrează un criteriu conform căruia această transformare este izoarică.

Cuvinte-cheie: *transformare, cuadrabilă, izoarică, figură, funcție, derivată.*

JEL: C00, C02.

Introducere

În matematică sunt studiate transformările cu anumite proprietăți. De exemplu, transformările spațiului, planului, care păstrează distanța dintre oricare două puncte numite transformări izometrice, au fost studiate suficient [1]. În lucrarea de față studiem transformările planului de

UDC: 514.174

ABOUT PLANE TRANSFORMATIONS THAT PRESERVE THE AREAS OF FIGURES

Assoc. Prof. PhD Pavel CHIRCU, ASEM
chircu.pavel@ase.md
ORCID: 0009-0004-4238-349X
DOI: https://doi.org/10.53486/econ.2024.127.059

In this paper are studied the coordinate plane transformations that preserve the areas of bounded quadrable figures. Such transformations are called isoarcs.

First, it is shown that the area of any bounded quadrable figure is equal to the sum of the areas of at most countable manifold of certain triangles disjoint two by two and located in this figure. Each of these triangles has a base parallel to the axis Ox. An example of a non-isometric isoaric transformation is shown. Consequently, the formula for the area of the figure bounded by an ellipse is derived without using integral calculus.

The plane transformations, examined in this article, are essentisl to both fields, mathematics and economics.

For a smooth transformation of the coordinate plane, is given a transformation represented by two functions of two variables with continuous first-order partial derivatives on the whole plane, so as a criterion is proved according to which this transformation is isoaric.

Keywords: *transformation, quadrable, isoaric, figure, function, derivative.*

JEL: C00, C02.

Introduction

Transformations with certain properties are studied in mathematics. For example, transformations of space, plane, which preserve the distance between any two points called isometric transformations have been studied sufficiently [1]. In the present paper, we study coordinate coordonate, care păstrează ariile figurilor cuadrabile mărginite. Astfel de transformări se numesc transformări izoarice (Definiția 3). Sunt prezentate unele proprietăți ale figurilor cuadrabile mărginite (Lemele 1, 2). Este prezentat un exemplu de transformare izoarică, care nu este și izometrică (Teorema 1). Ca aplicație, formula pentru aria unei figuri mărginite de o elipsă este dedusă fără a utiliza calculul integral. Pentru transformările netede ale planului de coordonate, un criteriu conform căruia aceste transformări sunt izoarice, este stabilit în limbajul derivatelor parțiale continue de ordinul întâi (Teorema 2).

Metode aplicate

Metodele utilizate în acest studiu sunt parte din metodele teoriei mulțimilor și din metodele analizei matematice clasice. De asemenea, sunt folosite metodele topologiei axei numerice, precum și metodele topologiei planului de coordonate.

Rezultate și discuții

Vom folosi următoarele notații:

- $\mathbb{N}^*$ – mulțimea numerelor naturale pozitive;
- $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$;
- $\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale;
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ – planul de coordonate carteziene;
- $\rho(A, B)$ – dinstanța dintre punctele A și B din planul $\mathbb{R}^2$;
- $S(\Phi)$ – aria figurii Φ din planul $\mathbb{R}^2$;
- $intX$ – mulțimea punctelor interioare ale mulțimii $X, X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Amintim că o transformare $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a planului $\mathbb{R}^2$ se numește izometrică, dacă:

plane transformations that preserve the areas of bounded quadrable figures. Such transformations are called isoaric transformations (Definition 3). Some properties of bounded quadrable figures are presented (Lemmas 1, 2). An example of an isoaric transformation that is not also isometric is presented (Theorem 1). As an application, the formula for the area of a figure bounded by an ellipse is deduced without using integral calculus. For smooth transformations of the coordinate plane, a criterion according to which these transformations are isoaric is established in the language of first-order continuous partial derivatives (Theorem 2).

Applied methods

The methods used in this study are part of the sets theory methods and those of classical mathematical analysis. Also, numerical axis topology methods and coordinate plane topology methods are used.

Results and discussion

We will use the following notations:

- $\mathbb{N}^*$ – the set of positive natural numbers;
- $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$;
- $\mathbb{R}$ – the set of real numbers;
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ – cartesian coordinate plane;
- $\rho(A, B)$ – the distance between points A and B in the plane $\mathbb{R}^2$;
- $S(\Phi)$ – the area of the figure Φ in the plane $\mathbb{R}^2$;
- $intX$ – the set of interior points of the set $X, X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Recall that a transformation $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ of the plan $\mathbb{R}^2$ is called isometric if**:**

$$\rho\big(F(A), F(B)\big) = \rho(A, B) \qquad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^2.$$

Definiție 1. Reuniunea unui număr finit de poligoane se numește figură poligonală.

Definiție 2. O figură mărginită Φ din planul $\mathbb{R}^2$ se numește cuadrabilă, dacă $\sup\{S(P) | P - figur\text{ă}\, poligonal\text{ă}, P \subseteq \Phi\} = \inf\{S(Q) | Q - figur\text{ă}\, poligonal\text{ă}\ \Phi \subseteq Q\}$ și această valoare comună se numește aria figurii Φ, notată, bineînțeles, prin $S(\Phi)$.

Este evident că $\Phi_1 \subseteq \Phi_2 \Rightarrow S(\Phi_1) \leq S(\Phi_2)$, pentru orice figuri cuadrabile Φ_1 și Φ_2.

Definition 1. The union of a finite number of polygons is called a polygonal figure.

Definition 2. A bounded figure Φ in the plane $\mathbb{R}^2$ is called quadrable if $\sup\{S(P) | P - poligonal\, figure, P \subseteq \Phi\} = \inf\{S(Q) | Q - poligonal\, figure\ \Phi \subseteq Q\}$ and this common value is called the area of the figure Φ denoted, of course, by $S(\Phi)$.

It is obvious that $\Phi_1 \subseteq \Phi_2 \Rightarrow S(\Phi_1) \leq S(\Phi_2)$, for any quadrable figures Φ_1 and Φ_2.

Definiția 3. O transformare $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a planului $\mathbb{R}^2$ se numește izoarică, dacă pentru orice figură cuadrabilă $\Phi \subset \mathbb{R}$

$$S(F(\Phi)) = S(\Phi).$$

Lema 1. Pentru orice figură cuadrabilă $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ există două șiruri de figuri poligonale $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots P_n \subseteq \cdots$ și $Q_1 \supseteq Q_2 \ldots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$, astfel că $P_n \subseteq \Phi \subseteq Q_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n\to\infty} S(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(Q_n) = S(\Phi)$.

Demonstrație: Conform definițiilor infimumului și supremumului, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există așa figuri poligonale R_n și T_n, încât $R_n \subseteq \Phi \subseteq T_n$ și $|S(\Phi) - S(R_n)| < \frac{S(\Phi)}{2n}$, iar $|S(T_n) - S(\Phi)| < \frac{S(\Phi)}{2n}$.

Atunci, figurile $P_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ și $Q_n = \bigcap_{i=1}^{n} T_i$ sunt, de asemenea, figuri poligonale și $R_n \subseteq P_n \subseteq \Phi \subseteq Q_n \subseteq T_n$. Prin urmare:

Definition 3. A transformation $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ of the plane $\mathbb{R}^2$ is called isoaric if for any quadrable figure $\Phi \subset \mathbb{R}$

$$S(F(\Phi)) = S(\Phi).$$

Lemma 1. For any quadrable figure $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ there are two sequences of polygonal figures $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots P_n \subseteq \cdots$ and $Q_1 \supseteq Q_2 \ldots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$ so that $P_n \subseteq \Phi \subseteq Q_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ and $\lim_{n\to\infty} S(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(Q_n) = S(\Phi)$.

Demonstration: According to the definitions of the infimum and the supremum for any $n \in \mathbb{N}^*$ there are such polygonal figures R_n and T_n that $R_n \subseteq \Phi \subseteq T_n$ and $|S(\Phi) - S(R_n)| < \frac{S(\Phi)}{2n}$ and $|S(T_n) - S(\Phi)| < \frac{S(\Phi)}{2n}$

Then the figures $P_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ and $Q_n = \bigcap_{i=1}^{n} T_i$ are also polygonal figures and $R_n \subseteq P_n \subseteq \Phi \subseteq Q_n \subseteq T_n$. Therefore:

$$S(R_n) \le S(P_n) \le S(\Phi) \le S(Q_n) \le S(T_n) \text{ și astfel/and so,}$$
$$|S(\Phi) - S(P_n)| \le |S(\Phi) - S(R_n)| < \frac{S(\Phi)}{2n} \quad \text{și}$$
$$|S(Q_n) - S(\Phi)| \le |S(T_n) - S(\Phi)| < \frac{S(\Phi)}{2n}.$$

Deci avem/So, we have:

$$S(\Phi) - \frac{S(\Phi)}{2n} < S(P_n) < S(\Phi) + \frac{S(\Phi)}{2n} \quad \text{și}$$
$$S(\Phi) - \frac{S(\Phi)}{2n} < S(Q_n) < S(\Phi) + \frac{S(\Phi)}{2n}. \tag{1}$$

Deoarece $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_n \subseteq \cdots$ și $Q_1 \supseteq Q_2 \ldots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$, rezultă că șirul $\{S(P_n)\}$ este monoton crescător și mărginit superior de $S(\Phi)$, iar șirul $\{S(Q_n)\}$ este monoton descrescător și mărginit inferior de $S(\Phi)$. Deci aceste șiruri sunt convergente și, trecând la limita în relațiile (1), obținem:

Considering $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_n \subseteq \cdots$ and $Q_1 \supseteq Q_2 \ldots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$ it follows that the sequence $\{S(P_n)\}$ is monotonically increasing and bounded above by $S(\Phi)$ and the sequence $\{S(Q_n)\}$ is monotonically decreasing and lower bounded by $S(\Phi)$. So, these sequences are convergent and, going to the limit in relations (1), we get:

$$S(\Phi) = \lim_{n\to\infty}\left(S(\Phi) - \frac{S(\Phi)}{2n}\right) \le \lim_{n\to\infty} S(P_n) \le \lim_{n\to\infty}\left(S(\Phi) + \frac{S(\Phi)}{2n}\right) = S(\Phi) \quad \text{și/and}$$
$$S(\Phi) = \lim\left(S(\Phi) - \frac{S(\Phi)}{2n}\right) \le \lim_{n\to\infty} S(Q_n) \le \lim_{n\to\infty}\left(S(\Phi) + \frac{S(\Phi)}{2n}\right) = S(\Phi).$$

De unde rezultă că:

It follows that:

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n) = S(\Phi) \quad \text{și/and} \quad \lim_{n\to\infty} S(Q_n) = S(\Phi).$$

Lema este demonstrată.

The lemma is demonstrated.

Remarcă. Orice figură poligonală poate fi divizată într-un număr finit de triunghiuri cu bazele paralele axei *Ox*.

Într-adevăr, orice poligon poate fi divizat într-un număr finit de asemenea triunghiuri.

Remark. Any polygonal figure can be divided into a finite number of triangles with bases parallel to the *Ox* axis.

Indeed, any polygon can be divided into a finite number of such triangles. So any poly-

Deci, orice figură poligonală, ca o reuniune a unui număr finit de poligoane, poate fi divizată într-un număr finit de triunghiuri cu bazele paralele axei *Ox*.

Lema 2. Dacă Φ este o figură cuadrabilă, nefiind o figură poligonală, atunci există o numărabilitate de triunghiuri $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m, \dots$ cu bazele paralele axei *Ox*, satisfăcând proprietățile

gonal figure as a union of a finite number of polygons can be divided into a finite number of triangles with bases parallel to the *Ox* axis.

Lemma 2. If Φ is a quadrable figure not being a polygonal figure then there is a countability of triangles $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m, \dots$ with bases parallel to the axis *Ox* satisfying the properties

$$\triangle_m \subseteq \Phi \ \forall\, m \in \mathbb{N}^*, S(\triangle_i \cap \triangle_j) = 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j \qquad \text{și/and}$$
$$S(\Phi) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m).$$

Demonstrație: În baza lemei 1 există un șir de figuri poligonale $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq P_{n+1} \dots$ cu proprietățile $P_n \subseteq \Phi$ și $\lim_{n\to\infty} S(P_n) = S(\Phi)$. Deoarece Φ nu este figură poligonală, șirul $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ poate fi selectat astfel încât $int(P_{n+1} \backslash P_n) \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$.

Conform remarcii de mai sus, figura poligonală P_1 poate fi divizată într-un numar finit de triunghiuri $\triangle_{01}, \triangle_{02}, \dots, \triangle_{0k_0}$ cu bazele paralele axei *Ox* și pentru orice $n \geq 1$ figura $P_{n+1} \backslash P_n$, ca o figură ce constă din reuniunea unui număr finit de poligoane, de asemenea, poate fi divizată într-un număr finit de triunghiuri $\triangle_{n1}, \triangle_{n2}, \dots, \triangle_{nk_n}$ cu bazele paralele a axei *Ox*.

Demonstration: In the base of lemma 1 there is a sequence of polygonal figures $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq P_{n+1} \dots$ with properties $P_n \subseteq \Phi$ and $\lim_{n\to\infty} S(P_n) = S(\Phi)$. Since Φ is not a polygonal figure the sequence $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ can be selected such that $int(P_{n+1} \backslash P_n) \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$.

According to the above remark the polygonal figure P_1 can be divided into a finite number of triangles $\triangle_{01}, \triangle_{02}, \dots, \triangle_{0k_0}$ with bases parallel to the *Ox* axis and for any $n \geq 1$ figure $P_{n+1} \backslash P_n$ as a figure consisting of a finite number of polygons can also be divided into a finite number of triangles $\triangle_{n1}, \triangle_{n2}, \dots, \triangle_{nk_n}$ with parallel bases to the *Ox* axis.

$$\text{Atunci } \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = P_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (P_{n+1} \backslash P_n)\right), \tag{2}$$

unde figurile P_1 și $(P_{n+1} \backslash P_n)\ n = 1; 2; 3; \dots$ sunt disjuncte 2 câte 2. Deoarece totalitatea $\{\triangle_{n1}, \triangle_{n2}, \dots, \triangle_{nk_n}\}$ este o divizare a figurii $P_{n+1} \backslash P_n$ pentru orice $n = 1; 2; 3; \dots$, atunci:

where the figures P_1 and $(P_{n+1} \backslash P_n)\ n = 1; 2; 3; \dots$ are disjoint 2 by 2. Since the totality of $\{\triangle_{n1}, \triangle_{n2}, \dots, \triangle_{nk_n}\}$ is a division of the figure $P_{n+1} \backslash P_n$ for any $n = 1; 2; 3; \dots$ then**:**

$$D = \left\{\triangle_{01}, \triangle_{02}, \dots, \triangle_{0k_0}, \triangle_{11}, \triangle_{12}, \dots, \triangle_{1k_1}, \triangle_{21}, \triangle_{22}, \dots, \triangle_{2k_2}, \dots, \triangle_{n1}, \triangle_{n2}, \dots, \triangle_{nk_n}, \dots\right\}$$

va fi o divizare a figurii $P_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (P_{n+1} \backslash P_n)\right)$, cu proprietățile $\triangle_{ij} \subseteq \Phi\ \forall i \in \mathbb{N}$ și $\forall j = \overline{1, k_\iota}$ iar $S(\triangle_{i_1 j_1} \cap \triangle_{i_1 j_2}) = 0$ pentru orice $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$.

Deoarece toatalitatea *D* este numărabilă, putem scrie $D = \{\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m, \dots\}$ și în baza relației (2) avem:

there will be a division of the figure $P_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (P_{n+1} \backslash P_n)\right)$ with the properties $\triangle_{ij} \subseteq \Phi\ \forall i \in \mathbb{N}$ and $\forall j = \overline{1, k_\iota}$ and $S(\triangle_{i_1 j_1} \cap \triangle_{i_1 j_2}) = 0$ for any $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$

Since the set *D* is countable we can write $D = \{\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m, \dots\}$ and based on relation (2) we have:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \triangle_m \tag{3}$$

Din/From $\triangle_m \subseteq \Phi$ și $S(\triangle_i \cap \triangle_j) = 0 \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j$, avem/we have:

$$\sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m) = S\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \triangle_m\right) \leq S(\Phi) \tag{4}$$

Deoarece:

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_n \subseteq \cdots$$

rezultă că:

$P_n = \cup_{i=1}^{n} P_i$ și $\cup_{i=1}^{n} P_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} P_i$.

Astfel, ținând cont de relația (3), avem:

$$S(\Phi) = \lim_{n\to\infty} S(P_n) = \lim_{n\to\infty} S\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) \leq \lim_{n\to\infty} S(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) = S\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \triangle_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m)$$

Adică $S(\Phi) \leq \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m)$ și având în vedere relația (4) rezultă că:

$$S(\Phi) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m).$$

Lema este demonstrată.

Evident că orice transformare izometrică este și izoarică.

Afirmația inversă nu este adevărată, precum ne arată:

Because:

it follows that

$P_n = \cup_{i=1}^{n} P_i$ and $\cup_{i=1}^{n} P_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} P_i$.

Thus given relation (3) we have:

That is $S(\Phi) \leq \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m)$ and taking into accont relation (4) it follows that:

The lemma is demonstrated.

Obviously any isometric transformation is also isoaric.

The reverse statement is not true as it shows us:

Teorema 1: / **Theorem 1:**

Fie/Let $k \in \mathbb{R} \quad k > 0, k \neq 1$. Atunci transformarea/ Then the transformation $F_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dată de formula/ given by the formula $F_k\big(M(x,y)\big) = M'\left(kx; \frac{y}{k}\right) = M'(u,v)$

$$\begin{cases} u = kx \\ v = \dfrac{y}{k} \end{cases}$$

este o transformare izoarică, dar nu și izometrică.

Demonstrație:

Transformarea $F_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este o transformare liniară și deci, dreptele trec în drepte, în rezultatul acțiunii F_k, iar dreptele paralele cu axa *Ox* trec în dreptele paralele cu axa *Ox*. Deci orice triunghi cu baza paralelă cu axa *Ox* trece într-un triunghi cu baza paralelă cu axa *Ox* .

Astfel, dacă triunghiul $\triangle$ are baza *a* și înălțimea *h*, atunci triunghiul $\triangle' = F_k(\triangle)$ va avea baza *ka* și înălțimea $\frac{h}{k}$, deoarece și dreptele paralele cu axa *Oy* vor trece în drepte paralele cu axa *Oy*.

is an isoaric but not isometric transformation.

Demonstration:

Transformation $F_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is a linear transformation and so the lines become straight as a result of the action F_k and the lines parallel to the *Ox* axis pass into the lines parallel to the *Ox* axis. So any triangle with base parallel to the *Ox* axis passes into a triangle with base parallel to the *Ox* axis.

So, if the triangle $\triangle$ has base *a* and height *h* then triangle $\triangle' = F_k(\triangle)$ will have base *ka* and height $\frac{h}{k}$ because the lines parallel to the *Oy* axis will also pass into lines parallel to the *Oy* axis.

Atunci/ Then: $S(\triangle') = \frac{1}{2}ka\frac{h}{k} = \frac{1}{2}ah = S(\triangle)$.

Dacă Φ este o figură poligonală, atunci ea poate fi divizată într-un număr finit de triunghiuri $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m$, cu bazele paralele axei *Ox*, astfel că:

If Φ is a polygonal figure, then it can be divided into a finite number of triangles $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m$ with bases parallel to the *Ox* axis such that:

$$S(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} S(\triangle_i)$$

atunci/then:

$$S\big(F(\Phi)\big) = \sum_{i=1}^{m} S(\triangle '_i) = \sum_{i=1}^{m} S(\triangle_i) = S(\Phi).$$

Dacă însă Φ este o figură mărginită și cuadrabilă, nefiind figură poligonală, atunci, conform lemei 2, există un șir $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m, \dots$ de triunghiuri cu bazele paralele cu axa *Ox*, cu proprietățile
$\triangle_m \subset \Phi \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, S\big(\triangle_i \cap \triangle_j\big) = 0$, pentru $i \neq j$ și $S(\Phi) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m)$.

Prin urmare, $\triangle'_m \subseteq F(\Phi) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$, $S\big(\triangle'_i \cap \triangle'_j\big) = 0 \ \forall i \neq j$ și:

If, however Φ is a bounded and quadrable non-polygonal figure then according to lemma 2 there is a sequence $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_m, \dots$ of triangles with bases parallel to the *Ox* axis with the properties
$\triangle_m \subset \Phi \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, S\big(\triangle_i \cap \triangle_j\big) = 0$, for $i \neq j$ and $S(\Phi) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m)$.

Therefore $\triangle'_m \subseteq F(\Phi) \ \forall m \in \mathbb{N}^*$, $S\big(\triangle'_i \cap \triangle'_j\big) = 0 \ \forall i \neq j$, and:

$$S\big(F(\Phi)\big) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle '_m) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\triangle_m) = S(\Phi)$$

adică *F* este o transformare izoarică.

i.e. *F* is an isoaric transformation.

Avem/We have $F_k\big(O(0;0)\big) = O'\left(k * 0; \frac{0}{k}\right) = O'(0;0)$ și/and $F_k\big(A(1;0)\big) = A'\left(k * 1; \frac{0}{k}\right) = A'(k;0)$

Astfel/ Thus: $\rho(O;A) = 1 \qquad \rho\big(F_k(O); F_k(A)\big) = \rho(O';A') = k \neq 1$, adică/i.e. $\rho(O;A) \neq \rho(O';A')$,

ceea ce înseamnă că F_k nu este izometrică.

Teorema este demonstrată.

Exemplul: Considerăm elipsa de ecuație

which means that F_k is not isometric.

The theorem is proved.

Example: Consider the ellipse of equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

și transformarea $F_{\sqrt{\frac{b}{a}}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de formula:

and transformation $F_{\sqrt{\frac{b}{a}}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given by the formula:

$$F_{\sqrt{\frac{b}{a}}}\big(M(x,y)\big) = M'\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x; \sqrt{\frac{a}{b}}y\right), \left(k = \sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

Atunci, conform **Teoremei 1**, această transformare este izoarică și:

Then, according to **Theorem 1**, this transformation is isoaric and:

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{b}{a}}x \\ v = \sqrt{\frac{a}{b}}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a}{b}}u \\ y = \sqrt{\frac{b}{a}}v \end{cases}$$

Acum elipsa (5) se transformă într-o curbă dată de ecuația:

Now the ellipse (5) turns into a curve given by the equation:

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}u\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}v\right)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{ab} + \frac{v^2}{ab} = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

Teorema 2: Fie

Theorem 2: Let

$$F(M(x,y)) = M'\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

o transformare a planului $\mathbb{R}^2$, în care funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ posedă derivate parțiale de ordinul întâi continue pe tot planul $\mathbb{R}^2$. Transformarea $F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este izoarică, dacă și numai dacă

a plane transformation $\mathbb{R}^2$ where the functions $u(x,y)$ and $v(x,y)$ possess continuous first-order partial derivatives on the whole plane $\mathbb{R}^2$. The transformation $F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is isoaric if and only if

$$\left|I\big(u(x,y), v(x,y)\big)\right| = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ unde } I\big(u(x,y), v(x,y)\big) = \begin{vmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ v'_x(x,y) & v'_y(x,y) \end{vmatrix}.$$

Demonstrație: Suficiența. Fie că $\left|I\big(u(x,y), v(x,y)\big)\right| = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ și Φ o figură cuadrabilă din $\mathbb{R}^2$, atunci aria figurii $F(\Phi)$ în sistemul de coordonate uOv va fi:

Demonstration: Sufficiency. Whether $\left|I\big(u(x,y), v(x,y)\big)\right| = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ and Φ a quadrable figure from $\mathbb{R}^2$. Then the area of the figure $F(\Phi)$ in the coordinate system uOv will be

$$S\big(F(\Phi)\big) = \iint\limits_{F(\Phi)} dudv$$

[2, p.178] și, conform formulei de calcul în cazul schimbului de variabilă [2, p.190],

[2, p.178] and according to the calculation formula in the case of variable exchange [2, p.190],

$$\iint_{F(\Phi)} dudv = \iint_{\Phi} \left|I\big(u(x,y), v(x,y)\big)\right| dxdy = \iint_{\Phi} 1\, dxdy = \iint_{\Phi} dxdy = S(\Phi).$$

Adică $S\big(F(\Phi)\big) = S(\Phi)$ pentru orice figură cuadrabilă Φ, ceea ce înseamnă că F este izoarică. Suficiența este demonstrată.

Id est $S\big(F(\Phi)\big) = S(\Phi)$ for any cuadrable figure Φ that means that F is isoaric. Sufficiency is demonstrated.

Necesitatea.

Necessity.

Fie/et $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(M(x,y) = M'(u(x,y), v(x,y))$.

Să arătăm că/ Let us show that $\left|I\big(u(x,y), v(x,y)\big)\right| = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Presupunem contrariu, că există un punct $M_0(x_0, y_0)$ în care:

Assume the opposite, that there is a point $M_0(x_0, y_0)$ where:

$$\left|I\big(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)\big)\right| \neq 1.$$

Sunt posibile 2 cazuri:

Then 2 cases are possible:

1) $|I\big(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)\big)| = C > 1$ și/and
2) $\left|I\big(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)\big)\right| = C < 1.$

În primul caz, din continuitatea pe tot planul $\mathbb{R}^2$ a derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor $u(x,y)$ și $v(x,y)$, rezultă că $I\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ și, prin urmare, și $|I(u(x,y),v(x,y))|$ este o funcție continuă în punctul $M_0(x_0,y_0)$. Atunci există o vecinătate:

In the first case, from the continuity on the whole plane $\mathbb{R}^2$ of the first-order partial derivatives of the functions $u(x,y)$ and $v(x,y)$ it follows that $I\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ and therefore also $|I(u(x,y),v(x,y))|$ is a continuous function at the point $M_0(x_0,y_0)$. Then there is a neighbourhood:

$V_r(M_0(x_0,y_0)) = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \rho(M,M_0) < r\}$ $(r \in \mathbb{R}, r > 0)$ a punctului/of the point $M_0(x_0,y_0)$, astfel că/so that:

$\left|\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right| - c\right| < \frac{c-1}{2}\ \forall(x,y) \in V_r\big(M_0(x_0y_0)\big),$

adică/i.e.: $-\frac{c-1}{2} < \left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right| - c < \frac{c-1}{2}$ sau/or

$$-\frac{c-1}{2} + c < \left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right| < c + \frac{c-1}{2}$$

de unde/whence $\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right| > \frac{c+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1\ \ \forall(x,y) \in V_r\big(M_0(x_0,y_0)\big).$

Atunci/then:

$$S\left(F\left(V_r\big(M_0(x_0y_0)\big)\right)\right) = \iint\limits_{F\left(V_r\left(M_0(x_0,y_0)\right)\right)} dudv = \iint\limits_{V_r\left(M_0(x_0,y_0)\right)} |I(u(x,y)\,,v(x,y))|dxdy >$$

$$> \iint_{V_r M_0(x_0y_0)} 1\,dxdy = \iint_{V_r\left(M_0(x_0y_0)\right)} dxdy = \ S\left(V_r\big(M_0(x_0,y_0)\big)\right).$$

Adică/that is: $S\left(F\left(V_r\big(M_0(x_0y_0)\big)\right)\right) > S\left(V_r\big(M_0(x_0,y_0)\big)\right)$, ceea ce contrazice faptul că transformarea *F* este izoarică/ which contradicts the fact that the transformation *F* is isoaric.

În cazul 2 din continuitatea pe tot planul $\mathbb{R}^2$ a derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor $u(x,y)$ și $v(x,y)$, rezultă că $I\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ și, prin urmare, și $\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right|$ este o funcție continuă în punctul $M_0(x_0,y_0)$. Atunci există o vecinătate:

In the second case from continuity on the whole plane $\mathbb{R}^2$ of the first-order partial derivatives of functions $u(x,y)$ and $v(x,y)$ it follows that $I\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ and therefore also $\left|I\big(u(x,y)v(x,y)\big)\right|$ is a continuous function at the point $M_0(x_0,y_0)$. Then there is a neighborhood such that:

$$V_\delta(M_0,(x_0,y_0) = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \rho(M,M_0) < \delta\}\ (\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0)$$

a punctului $M_0(x_0,y_0)$, astfel că

of the point $M_0(x_0,y_0)$ thus

$$\left|\left|I\big(u(x,y),V(x,y)\big)\right| - c\right| < \frac{1-c}{2}\ \ \forall(x,y) \in V_\delta\big(M_0(x_0,y_0)\big)$$

adică:

i.e.:

$-\frac{1-c}{2} < \left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right| - c < \frac{1-c}{2}$ sau/or

$c-\frac{1-c}{2}<\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right|<c+\frac{1-c}{2}$ de unde/whence

$\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right|<\frac{1+c}{2}<\frac{1+1}{2}=1 \quad \forall(x,y)\in V_\delta\big(M_0(x_0,y_0)\big)$.

Atunci/Then:

$$S\Big(F\Big(V_\delta\big(M_0(x_0,y_0)\big)\Big)\Big)=\iint\limits_{F\left(V_\delta(M_0(x_0,y_0))\right)} dudv=\iint\limits_{V_\delta(M_0(x_0,y_0))}\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right|dxdy$$

$$<\iint\limits_{V_\delta(M_0(x_0,y_0))} 1*dxdy=\iint\limits_{V_\delta(M_0(x_0,y_0))} dxdy=S\Big(V_\delta\big(M_0(x_0,y_0)\big)\Big).$$

Adică/That is $S\Big(F\Big(V_\delta\big(M_0(x_0,y_0)\big)\Big)\Big)<S\Big(V_\delta\big(M_0(x_0,y_0)\big)\Big)$

Astfel, în ambele cazuri posibile, presupunerea noastră conduce la o contradicție cu ipoteza teoremei și deci rămâne că:

Thus, in both possible cases our assumption leads to a contradiction with the hypothesis of the theorem and so it remains that:

$$\left|I\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right|=1 \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Teorema este demonstrată.

The theorem is proved.

Concluzii

În prezentul articol este inițiat studiul transformărilor planului de coordonate ce păstrează ariile figurilor. Sunt caracterizate aceste transformări prin două criterii. Unul este formulat în limbaj geometric, celălalt – în limbajul calculului diferențial și integral. Rezultatele obținute pot fi aplicate în domenii matematice adiacente, precum și în elaborarea unor tehnologii industriale.

Conclusions

The study of transformations of the coordinate's plane, which preserves the areas of the figures, is initiated. These transformations are characterized by two criteria. One is formulated in geometric language, the other – in the language of differential and integral calculus. The obtained results can be applied in adjacent mathematical fields, as well as in the development of some industrial technologies.

Bibliografie/Bibliography:

1. COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. Second edition. Hoboken: Wiley, 1969. 469 p. ISBN 978-0471-50-458-0.
2. PISKUNOV, N. *Calcul différentiel et integral*. 9eme ed. Moscou: MIR, 1969, t. 2. 306 p.