[330.4+519.86]:[338.3+338.47]:504.054

ABORDAREA UNOR MODELE ECONOMICO-MATEMATICE ALE PROBLEMELOR DE PRODUCȚIE ȘI TRANSPORT CU RESTRICȚII DE POLUARE ASUPRA MEDIULUI

Drd. Ștefan BLANUȚA, ASEM
stefan.blanuta@gmail.com
ORCID: 0000-0003-2611-4279
Conf. univ. dr. Anatol GODONOAGĂ, ASEM
godonoaga@ase.md
ORCID: 0000-0001-7459-9536
DOI: https://doi.org/10.53486/econ.2022.122.076

În lucrarea dată se abordează unele procese decizionale din spațiile economice de producție și de transport, axate pe optimizarea acestora, sub diverse aspecte. Se pune accent pe valorificarea deciziilor eficiente, cu respectarea unor condiții tradiționale și a unor restricții speciale impuse de fenomenul de poluare. Poluarea este consecința activităților economice din domeniile respective. În majoritatea modelelor economico-matematice, funcțiile de poluare definesc constrângeri care pot diminua, esențial, în raport cu situațiile clasice, mulțimea soluțiilor admisibile. Pentru anumite situații se propun algoritmi numerici constructivi care ar putea soluționa efectiv și în timp real problemele în cauză.

Cuvinte-cheie*: model economico-matematic, producție, transport, restricții, funcții de poluare, algoritm.*

JEL: C02, C61, D22.

Introducere

Sistemele economice, în intensă activitate, urmăresc scopuri majore, precum: maximum venit sau profit, minimum cost, sau extremum de alți indicatori profitabili, pe lângă realizarea acestor indicatori, produc și fluxuri nocive, care influențează negativ asupra me-

[330.4+519.86]:[338.3+338.47]:504.054

APPROACH OF SOME ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELS OF PRODUCTION AND TRANSPORTATION PROBLEMS WITH ENVIRONMENTAL POLLUTION RESTRICTIONS

PhD candidate Stefan BLANUTA, ASEM
stefan.blanuta@gmail.com
ORCID: 0000-0003-2611-4279
Assoc. Prof. PhD Anatol GODONOAGA, ASEM
godonoaga@ase.md
ORCID: 0000-0001-7459-9536
DOI: https://doi.org/10.53486/econ.2022.122.076

The paper addresses some decision-making processes in the economic areas of production and transport, focused on the optimization, in various aspects, of these processes. A special emphasis is given to capitalizing on optimal decisions, respecting traditional conditions and special restrictions imposed by the pollution phenomenon. Pollution is the consequence of economic activities in the respective fields. In most economic and mathematical models, the pollution functions define constraints, which can essentially reduce, compared to classical situations, the set of admissible solutions. For certain situations, constructive numerical algorithms are proposed, which could effectively and in real time solve the problems in question.

Keywords*: economic and mathematical model, production, transport, restrictions, pollution functions, algorithm.*

JEL: C02, C61, D22.

Introduction

Economic systems, being in intense activity, pursue major goals such as maximising income or profit, minimising cost, or extremum of other profitable indicators, in addition to achieving these indicators, also produce harmful flows, which seriously influence the envidiului ambiant. Toate acestea se răsfrâng direct sau indirect asupra sănătății populației, a produselor agricole și a celor de primă necesitate. În primul rând, compușii toxici se determină ca rezultat al activității intensive a fabricilor, uzinelor şi, nu în ultimul rând, a organizațiilor de orice tip de transport.

În literatura de specialitate [1], dar mai ales în cea care ține de modelarea producției [2] și transportului [3], cu regret, se acordă o atenție insuficientă acelor daune pe care le aduc asemenea activități omenirii și mediului.

Deseori, ofertele sunt exagerate vizavi de cerere, iar cererile abuzive, de asemenea, s-ar cuveni, într-un mod sau altul, să fie reglementate.

În lucrare se analizează mai multe modele din sfera producției și transportului, în care se includ restricții suplimentare cu participarea funcțiilor de poluare. Considerăm absolut necesare asemenea constrângeri pentru a trăi și activa pe o planetă prosperă și sănătoasă.

Metode aplicate

Noțiunea de model economico-matematic este una fundamentală pentru studiul dat. Fiecare asemenea model pune în evidență o funcție obiectiv [3], în dependență de scopul formulat și un număr finit de restricții, care în mod logic, dar și în context economic, exprimă restricțiile în forma unor inegalități. Restricțiile redau, de regulă, acele constrângeri în care se află sistemul economic. Ele sunt dictate de posibilitățile interne, dar, în foarte mare măsură și de „dictatura sau loialitatea" mediului ambiant.

Rezultatele proceselor de optimizare se bazează pe proprietățile modelelor liniare [3] și a celor convexe [4], dar și pe anumite modificări [5,6] ale metodei gradientului sau gradientului generalizat [7]. Pentru majoritatea modelelor abordate se aduc interpretări geometrice, bazate pe afirmații din domeniul programării liniare [3]. La rezolvarea practică a problemelor concrete este necesară stabilirea validității modelului utilizat, dar și determinarea metodei/metodelor eficiente de identificare a soluției optime, acceptate la nivel de experți.

ronment. All these directly or indirectly affect the health of the population, agricultural products and basic necessities. First of all, harmful compounds are determined as a result of the intensive activity of factories, plants and, last but not least, organizations of any type of transport.

In specialized literature [1], but especially that in production modelling [2] and transport [3], unfortunately, insufficient attention is paid to the damage that such activities bring to humanity and the environment.

Offers are often exaggerated in relation to demand, and abusive requests would also have to be regulated in one way or another.

The paper analyses several models from the sphere of production and transport, in which additional restrictions are included with the participation of pollution functions. We consider such constraints absolutely necessary in order to live and work on a prosperous and healthy planet.

Applied methods

The notion of economic and mathematical model is fundamental for the given study. Each model highlights an objective function [3], depending on the formulated purpose, and a finite number of restrictions, which logically, but also in an economic context, express the restrictions in the form of inequalities. Restrictions usually reproduce those constraints in which the economic system is located. They are dictated by internal possibilities, but, to a very large extent by the "dictatorship or loyalty" of the environment.

The results of the optimization processes are based on the properties of linear [3] and convex models [4], but also on certain modifications [5, 6] of the gradient method, or the generalized gradient [7]. For most of the models addressed, geometric interpretations are given, based on statements from the field of linear programming [3]. In the practical solution of concrete problems, it is necessary to establish the validity of the model used, but also to determine, if there are more, the effective method of identifying the optimal solution, accepted at the experts' level.

Rezultate și discuții

Fie că se studiază un sistem arbitrar economic de producție, despre care se cunoaște mecanismul de transformare a resurselor, reprezentate prin vectorul ***x***, în oferte ale bunurilor, reprezentate prin vectorul ***y***. Se admite, că această transformare este redată prin funcția de producție ***f(x). Prelucrarea resurselor****, în afară de „bunuri bune" produce și „bunuri rele", valoarea numerică a cărora, indicatorul* ***φ(x),*** exprimă gradul de poluare a mediului. Indicatorul numeric ***φ(x)***, scalar sau vectorial, se numește funcție de poluare.

În una dintre variantele frecvent abordate în teoria economică a sistemelor de producție [4], se analizează problema maximizării volumului de producție:

Results and discussions

Let us study an arbitrary economic system of production, about which the mechanism of transformation of resources, represented by the vector ***x***, into offers of goods, represented by the vector ***y***, is followed. Let us admit that this transformation is rendered by the production function ***f(x). The processing of resources,*** *apart from "good goods" also produces "bad goods", the numerical value of which, the indicator* ***φ(x)***, expresses the degree of environmental pollution. The numerical indicator ***φ(x)***, scalar or vector, is called the pollution function.

In one of the variants frequently addressed in the economic theory of production systems [4], the problem of maximizing production volume is analysed:

$$y = f(x) \to \max \tag{1}$$

cu condiția că costul total al resurselor nu depășește suma de bani *C*:

with condition that the total cost of the resources does not exceed the amount of money *C*:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq C, \tag{2}$$

$$\text{și/and} \quad 0 \leq x_j \leq \overline{x}_j, j = \overline{1,n} \tag{3}$$

Geometric, pentru *n=2*, modelul este reprezentat în figura 1 în care, pentru <u>cazul 1</u>, nu se iau în calcul restricții cu privire la nivelul „acceptabil" de poluare, pe când <u>cazul 2</u> prezintă situația de aplicare a restricției de poluare de forma:

Geometrically, for *n=2*, the model is represented in figure 1 where, for <u>case 1</u>, restrictions regarding the "acceptable" level of pollution are not taken into account, while <u>case 2</u> presents the situation of applying the pollution restriction in the form:

$$\varphi(x) \leq \overline{\varphi}\ , \tag{4}$$

unde $\overline{\varphi}$ este plafonul admisibil de emisii nocive.

<u>Remarcă</u>. Reprezentarea geometrică expusă admite că funcția $\varphi(x)$ este liniară.

<u>Remarcă</u>. S-ar putea presupune că în afară de (4), ar putea fi, din punct de vedere ecologic, impunerea respectării și următoarei inegalități:

where $\overline{\varphi}$ is the permissible ceiling of harmful emissions.

<u>Remark</u>. The exposed geometric representation admits that the function *φ(x)* is linear.

<u>Remark</u>. It could be assumed that, apart from (4), it could be, from an ecological point of view, also imposing the following inequality:

$$\varphi(x)/f(x) \leq \overline{\varphi_f}, \tag{5}$$

$\overline{\varphi_f}$ – fiind valoarea maximă admisibilă de poluare în raport cu o unitate de produs.

Logic este clar: modelul (1) – (4) sau (1) – (5) constrânge grupul decizional să micșoreze, față de modelul (1) – (3), cantitatea de producție. Astfel, și valoarea venitului acestui sistem va deveni mai modestă.

$\overline{\varphi_f}$ – being the maximum allowable pollution value in relation to a unit of product.

The logic is clear: the model (1) – (4), or (1) – (5) forces the decision-making group to reduce, compared to the model (1) – (3), the amount of production. Thus, the income value of this system will also become more modest.

Ipotezele [8] referitor la funcția φ *(x)*:

1) *φ (x)* – nedescrescătoare față de fiecare componentă x_j;
2) *φ* (0, 0,...,0) = 0;
3) 3. $\varphi(x_1,..., x_j,..., x_n) > 0$ pentru $x_j > 0$, $j = \overline{1, n}$;
4) $\varphi(\cdot) \to \infty$, dacă $(\cdot) \to \infty$.

Remarcă. O înțelegere mai clară a funcției de poluare, ar susține pe calea dependenței:

$$\varphi(x) = \Psi(y) = \Psi(f(x)),$$

ceea ce denotă că gradul de poluare depinde în mod direct de cantitatea produsă ***y*,** iar aceasta, la rândul său, depinde de cantitățile de resurse utilizate.

Remarcă. Precum funcția de producție și cea de poluare ar putea avea diverse forme [8-9]:

a) liniară față de ***y*** și liniară față de ***x***;
b) liniară față de ***y***, neliniară în raport cu ***x***;
c) logaritmică față de ***y***, dar diverse forme de dependență în raport cu ***x***,... și altele.

Astfel, s-ar obține o gamă largă de modele economico-matematice, în care participă una sau mai multe restricții cu prezența funcției de poluare φ *(x)*.

The hypotheses [8] regarding the function *φ (x)*:

1) *φ (x)* – non-decreasing with respect to each component x_j;
2) *φ* (0, 0,...,0) = 0;
3) $\varphi(x_1,..., x_j,..., x_n) > 0$ for $x_j > 0$, $j = \overline{1, n}$;
4) $\varphi(\cdot) \to \infty$, if $(\cdot) \to \infty$.

Remark. A clearer understanding of the function of pollution, would go the way of dependence:

which denotes that the degree of pollution directly depends on the quantity produced ***y***, and this, in turn, depends on the quantities of resources used.

Remark. Like the production function, the pollution function could have various forms [8, 9]:

a) linear with respect to ***y*** and linear with respect to ***x***;
b) linear with respect to ***y***, non-linear with respect to ***x***;
c) logarithmic with respect to ***y***, but various forms of dependence with respect to ***x*,...** and others.

Thus, a wide range of economic-mathematical models would be obtained, in which one or more restrictions with the presence of the pollution function *φ (x)* participate.

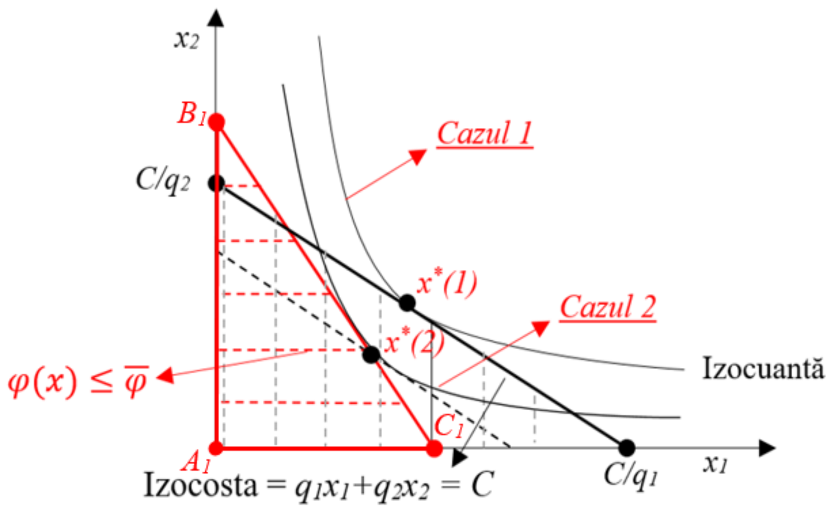

Figura 1. O interpretare geometrică a modelelor (1)-(3) și (1)-(4)/
Figure 1. A geometric interpretation of models (1)-(3) and (1)-(4)
Sursa*: elaborată de autori în baza proprietăților funcției de producție* [4]/
Source: *developed by the authors based on the properties of the production function* [4]

Algoritm de soluționare a modelului de producție cu restricții la emisiile poluante

Algoritmul se construiește în baza metodei proiecției gradientului generalizat [7]. Mai exact, acesta este o modificare a acestei metode [5, 6]. Și anume, dacă x^k se află în domeniul „ε_k–admisibil", trecerea de la varianta aproximativă x^k a soluției optime x^*, la varianta x^{k+1} se execută în direcția gradientului (sau gradientului generalizat) al funcției de producție $f(x)$. Dacă x^k se află în afara domeniului „ε_k – admisibil", trecerea la x^{k+1} se face în direcția antigradientului determinat de restricția cu abatere majoră. Mărimea pasului h_k , de trecere de la x^k la x^{k+1} , se determină în mod programat [5].

Expunerea algoritmului

Se construiește consecutivitatea x^0, x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ...; x^0 fiind punctul de start.

Se definește mulțimea $X=\{x\epsilon E^n: 0 \le x_j \le \bar{x}_j, j = 1, \dots, n\}$. Se ia $x^0 \in X$.

Se construiesc funcțiile:

$\varphi_1(x) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j - C,$

$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \bar{\varphi},$

$\varphi_3(x) = \varphi(x) - \overline{\varphi_f} \cdot f(x).$

Se calculează gradienții acestor funcții:

$grad\ \varphi_1(x) = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T,$

$grad\ \varphi_2(x) = grad\ \varphi(x),$

$grad\ \varphi_3(x) = grad\ \varphi(x) - \overline{\varphi_f} \cdot grad\ f(x).$

Fie punctul x^k deja cunoscut. Se indică numărul $\varepsilon_k>0$ [5,9].

Se calculează valorile funcțiilor $\varphi_1(x^k)$, $\varphi_2(x^k)$, $\varphi_3(x^k)$.

Se definește

$\varphi^k(x^k) = \max\{\varphi_1(x^k), \varphi_2(x^k), \varphi_3(x^k)\}.$

Definiție. Dacă $x^k \in X$ și $\varphi^k(x^k) \le \varepsilon_k$ se va spune că punctul x^k este ε_k – admisibil. Dacă $x^k \in X$, dar $\varphi^k(x^k) > \varepsilon_k$, atunci x^k nu este punct ε_k – admisibil.

Trecerea de la x^k la x^{k+1} se face astfel:

Algorithm for solving the production model with restrictions on pollutant emissions

The algorithm is built based on the generalized gradient projection method [7]. More precisely, this is a modification of this method [5, 6]. Namely. If x^k is in the „ε_k–admissible" domain, moving from the approximate version x^k, of the optimal solution x^*, in the variant x^{k+1} it is executed in the direction of the gradient (or generalized gradient) of the production function $f(x)$. If x^k is outside the „ε_k–admissible" domain, the transition to x^{k+1} is made in the direction of the antigradient determined by the major deviation restriction. The size of the step h_k , of transition from x^k to x^{k+1}, is determined in a programmed way [5].

Algorithm exposure

The sequence x^0, x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ... is constructed; x^0 - being the starting point.

The set $X=\{x\epsilon E^n: 0 \le x_j \le \bar{x}_j, j = 1, \dots, n\}$ is defined. Take $x^0 \in X$.

The functions are built:

$\varphi_1(x) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j - C,$

$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \bar{\varphi},$

$\varphi_3(x) = \varphi(x) - \overline{\varphi_f} \cdot f(x).$

The gradients of these functions are calculated:

$grad\ \varphi_1(x) = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T,$

$grad\ \varphi_2(x) = grad\ \varphi(x),$

$grad\ \varphi_3(x) = grad\ \varphi(x) - \overline{\varphi_f} \cdot grad\ f(x).$

Let the point x^k already be known. The number $\varepsilon_k>0$ is indicated [5,9].

The function values are calculated $\varphi_1(x^k)$, $\varphi_2(x^k)$, $\varphi_3(x^k)$.

Define

$\varphi^k(x^k) = \max\{\varphi_1(x^k), \varphi_2(x^k), \varphi_3(x^k)\}.$

Definition. If $x^k \in X$ și $\varphi^k(x^k) \le \varepsilon_k$ it will be said that the point x^k is ε_k – admissible. If $x^k \in X$ but $\varphi^k(x^k) > \varepsilon_k$, then x^k is not an ε_k – admissible point.

The transition from x^k to x^{k+1} is done like this:

$$x^{k+1}=P_x(x^k + h_k \cdot \eta^k),$$

$$\text{iar/and } \eta^k = \begin{cases} grad\ f(x^k), & dacă\ \varphi^k(x^k) \le \varepsilon_k \\ -grad\ \varphi^k(x^k), & dacă\ \varphi^k(x^k) > \varepsilon_k \end{cases}$$

Pentru pasul h_k se admit îndeplinite condițiile tradiționale:

For step h_k it is assumed that the traditional conditions are fulfilled:

$$h_k \geq 0,\ h_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty.$$

Remarcă. Dacă funcția de producție *f(x)* este concavă [4], iar funcția de poluare este convexă [4] pe *X*, atunci funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ sunt convexe pe mulțimea *X*.

***Model al transporturilor cu restricții la emisiile nocive* [10]**

Fie în modelul clasic de transport [3], se presupune că între punctul de ofertă *i = 1, 2, ..., m*, cu capacitatea de ofertă a_i și punctul de consum *j = 1, 2, ..., n*, cu cererea b_j, există k_{ij} traseuri pentru transportarea bunurilor. Se introduc următoarele notații:

$x_{ij}^{l_{ij}}$ – volumul de producție ce urmează a fi transportat de la *i* la *j* pe traseul l_{ij} ($l_{ij} = 1, 2, ..., k_{ij}$);

$c_{ij}^{l_{ij}}$ – prețul de transport de la punctul *i* la punctul *j* pe traseul respectiv l_{ij} ($l_{ij} = 1, 2, ..., k_{ij}$);

$\bar{x}_{ij}^{l_{ij}}$ – capacitatea de transport a traseului l_{ij}.

Fie că e necesar de minimizat cheltuielile totale de transport:

Remark. If the production function *f(x)* is concave [4], and the pollution function is convex [4] on *X*, then the functions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ are convex on the set *X*.

***Model of transport with restrictions on harmful emissions* [10]**

Either in the classic transport model [3], it is assumed that between the supply point *i = 1, 2, ..., m*, with supply capacity a_i and consumption point *j = 1, 2, ..., n*, with demand b_j, there are k_{ij} routes for transporting goods. The following notations are introduced:

$x_{ij}^{l_{ij}}$ – the volume of production to be transported from *i* to *j* along the route l_{ij} ($l_{ij} = 1, 2, ..., k_{ij}$);

$c_{ij}^{l_{ij}}$ – the transport price from point *i* to point *j* on that route l_{ij} ($l_{ij} = 1, 2, ..., k_{ij}$);

$\bar{x}_{ij}^{l_{ij}}$ – the transport capacity of the route l_{ij}.

Whether it is necessary to minimize the total transport costs:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l_{ij}=1}^{k_{ij}} c_{ij}^{l_{ij}} \cdot x_{ij}^{l_{ij}} \to min \qquad (6)$$

Cu condițiile/With the conditions:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l_{ij}=1}^{k_{ij}} x_{ij}^{l_{ij}} \leq a_i, i = \overline{1, m} \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l_{ij}=1}^{k_{ij}} x_{ij}^{l_{ij}} \geq b_j, j = \overline{1, n} \qquad (8)$$

$$0 \leq x_{ij}^{l_{ij}} \leq \bar{x}_{ij}^{l_{ij}}, l_{ij} = \overline{1, k_{ij}}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \qquad (9)$$

Se face presupunerea că transportul cantității $x_{ij}^{l_{ij}}$ pe traseul l_{ij} implică o emisie nocivă proporțională distanței $d_{ij}^{l_{ij}}$ dintre punctul *i* și punctul *j*. Cu alte cuvinte, funcția de poluare corespunzătoare are aspectul:

The assumption is made that the transport of the quantity $x_{ij}^{l_{ij}}$ on the route l_{ij} involves a harmful emission proportional to the distance $d_{ij}^{l_{ij}}$ between point *i* and point *j*. In other words, the corresponding pollution function looks like:

$$\varphi_{ij}^{l_{ij}} = d_{ij}^{l_{ij}} \cdot x_{ij}^{l_{ij}} \qquad (10)$$

Astfel, la modelul (6) – (9) pot fi adăugate noi restricții, de exemplu, de forma:

Thus, new restrictions can be added to the model (6) – (9), for example, of the form:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l_{ij}=1}^{k_{ij}} d_{ij}^{l_{ij}} \cdot x_{ij}^{l_{ij}} \leq \bar{Z}_1, \qquad (11)$$

$$\varphi(x)/g(x) \leq \bar{Z}_2. \qquad (12)$$

Aici/ Here $$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l_{ij}=1}^{k_{ij}} x_{ij}^{l_{ij}}. \qquad (13)$$

Restricția (11) exprimă gradul total de poluare în rezultatul operațiilor de transport, acest grad nu trece de plafonul $\bar{Z}_1$ – stabilit din timp. Condiția (12) descrie media de poluare față de o unitate transportată de bun, iar valoarea maximală

Restriction (11) expresses the total degree of pollution as a result of transport operations, this degree does not exceed the ceiling $\bar{Z}_1$ – established in time. Condition (12) describes the average pollution with respect to a unit transa acesteia se admite a fi $\bar{Z}_2$ – de asemenea, a priori indicată.

Remarcă. Pentru unele trasee l_{ij}, ar putea fi incluse restricții similare, de exemplu:

ported by the good, and its maximum value is allowed to be $\bar{Z}_2$ – also indicated a priori.

Remark. For some l_{ij} routes, similar restrictions could be included, for example:

$$\varphi_{ij}^{l_{ij}} \leq \bar{\varphi}_{ij}^{l_{ij}}. \tag{14}$$

Remarcă. Modelul de transport (6) – (9), cu includerea condițiilor (11), (12), (14), devine mai complex, însă mai adecvat situațiilor reale. Noile restricții, evident, reduc spațiul descris de relațiile (7) – (9). Totodată, prin restricțiile de poluare s-ar putea cere diminuarea anumitor b_j, dând prin aceasta priorități relațiilor (11)-(14).

Exemple de modele de producție cu restricții la emisiile nocive

1. Maximizarea volumului de producție

Remark. The transport model (6) – (9), with the inclusion of conditions (11), (12), (14), becomes more complex, but more appropriate to real situations. The new restrictions obviously reduce the space described by relations (7) – (9). At the same time, pollution restrictions could require the reduction of certain bj, thus giving priority to relationships (11)-(14).

Examples of production models with restrictions on harmful emissions

1. Maximizing production volume

$$y = f(x) \to \frac{max}{x} \tag{1_1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq C \tag{2_1}$$

$$\underline{x_j} \leq x_j \leq \overline{x_j}\ , j=\overline{1,n} \tag{3_1}$$

$$\Psi(y) = \Psi\big(f(x)\big) = \varphi(x) \leq \bar{\varphi} \tag{4_1}$$

$$\frac{\varphi(x)}{y} \leq \overline{\varphi_f} \tag{5_1}$$

2. Maximizarea venitului

2. Maximizing income

$$Z(y) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot y_j \to \frac{max}{y} \tag{1_2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq b_i\ , i=\overline{1,m} \tag{2_2}$$

$$\underline{y_j} \leq y_j \leq \overline{y_j}\ \ , j=\overline{1,n} \tag{3_2}$$

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot y_j \leq \bar{\varphi} \tag{4_2}$$

$$\varphi_j(y_j) = d_j \cdot y_j \leq \overline{\varphi_j} \tag{5_2}$$

În cadrul acestui model se presupune:

1. Sistemul de producție are planificat de a produce *n* tipuri de bunuri (produse), cantitativ, notate cu y_j, $j=\overline{1,n}$ și care urmează de a fi comercializate la prețurile p_j (constante sau dependente de volumul y_j);
2. a_{ij} – normele de consum a resursei *i* pentru a obține o unitate de produs *j;*
3. b_j – disponibilul resursei *i* ($i=\overline{1,m}$);
4. $\underline{y_j}$ – cantitatea minimă „rezonabilă” de ofertă a produsului *j* ($j=\overline{1,n}$);
5. $\overline{y_j}$– cantitatea maximă (se apreciază: sau din considerente cu privire la

In this model it is assumed that:

1. The production system is planned to produce *n* types of goods (products), quantitatively, denoted by y_j, $j=\overline{1,n}$ and are to be sold at prices p_j (constant, or dependent on the volume y_j);
2. a_{ij} – consumption norms of resource *i* to obtain a unit of product *j*;
3. b_j – resource availability *i* ($i=\overline{1,m}$);
4. $\underline{y_j}$ – minimum “reasonable” quantity of the product offer *j* ($j=\overline{1,n}$);
5. $\overline{y_j}$ – the maximum quantity (appreciated: or from considerations regarding

cererea vizavi de bunul *j*, sau reieșind din posibilitățile și capacitățile întreprinderii date) de ofertă a produsului *j* ($j=\overline{1,n}$);

6. $\varphi(y)$ – funcția sumară de emisii nocive în raport cu toate produsele $j=\overline{1,n}$;
7. $\bar{\varphi}$ – marja (plafonul) de maximă poluare în raport cu toate produsele ;
8. $\varphi_j(y_j)$ – nivelul de poluare în raport cu produsul *j*, care se presupune a fi proporțională cantității de producție y_j, cu coeficientul de proporționalitate d_j (cc se consideră mărime cunoscută);
9. $\overline{\varphi_j}$ – „pragul" de maximă poluare în raport cu produsul *j*.

3. Minimizarea funcției cost

the request regarding the good *j*, or arising from the possibilities and capacities of the given enterprise) of the product offer *j* ($j=\overline{1,n}$);

6. $\varphi(y)$ – the summary function of harmful emissions in relation to all products $j=\overline{1,n}$;
7. $\bar{\varphi}$ – the margin (ceiling) of maximum pollution in relation to all products;
8. $\varphi_j(y_j)$ – the level of pollution in relation to product *j*., which is assumed to be proportional to the production quantity y_j with the proportionality coefficient d_j (cc is considered a known quantity);
9. $\overline{\varphi_j}$ – the "threshold" of maximum pollution in relation to product *j*.

3. Minimizing the cost function

$$C(y) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j \to \frac{min}{y} \qquad (1_3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \geq \text{V} \qquad (2_3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq b_i \,,\ i=\overline{1,m} \qquad (3_3)$$

$$\underline{y_j} \leq y_j \leq \overline{y_j} \ ,\ j=\overline{1,n} \qquad (4_3)$$

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y_j) \leq \bar{\varphi} \qquad (5_3)$$

$$\varphi_j(y_j) \leq \overline{\varphi_j} \,,\ j=\overline{1,n} \qquad (6_3)$$

În modelul (1_3) – (6_3), se pune problema minimizării prețului producției sistemului dat de producție. Condiția (2_3) înaintează cerința ca venitul total, obținut prin comercializarea bunurilor, să nu fie mai mic decât valoarea indicată V. Celelalte restricții sunt similare celor din modelul 2.

C_j reprezintă prețul mediu care revine unei unități de produs *j* ($j=\overline{1,n}$).

4. Minimizarea funcției de poluare

In the model (1_3) – (6_3) the problem of minimizing the production cost of the given production system is posed. Condition (2_3) puts forward the requirement that the total income, obtained by trading the goods, is not less than the value indicated V. The other restrictions are similar to model 2.

C_j represents the average unit cost of a product *j* ($j=\overline{1,n}$).

4. Minimizing the pollution function

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \cdot y_j \to min \qquad (1_4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \geq \text{V} \qquad (2_4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \leq \text{C} \qquad (3_4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq b_i \,,\ i=\overline{1,m} \qquad (4_4)$$

$$\underline{y_j} \leq y_j \leq \overline{y_j} \qquad (5_4)$$

Raționamentul modelului (1_4) – (5_4) constă în următoarele: se cere ca în domeniul în care venitul total nu e mai mic decât valoarea V, iar prețul de producere nu depășește valoarea

The reasoning of the model (1_4) – (5_4) consists of the following: it is required as in the field, where the total income is not lower than the V value, the production cost does not

C, de determinat un asemenea output al sistemului de producție, cu respectarea restricțiilor tradiționale (4_4) – (5_4), care asigură cel mai mic nivel de poluare a mediului ambiant.

5. Optimizarea rentabilității [6]. Se admite că fiecare factor de producție $\boldsymbol{i}$ ar putea fi procurat pe mai multe piețe (dintr-un număr dat $\boldsymbol{m_i}$, $i = \overline{1,m}$). La fel, produsul $\boldsymbol{j}$ ar putea fi realizat pe câteva din cele $\boldsymbol{n_j}$ piețe existente, $j = \overline{1,n}$. Se definește funcția de rentabilitate de forma și cu scopul:

exceed the value C, to determine such an output of the production system, respecting the traditional restrictions (4_4) – (5_4), which ensure the lowest level of environmental pollution.

5. Optimizing profitability [6]. It is assumed that each production factor $\boldsymbol{i}$ could be procured in several markets (from a given number $\boldsymbol{m_i}$, $i = \overline{1,m}$). Likewise, product $\boldsymbol{j}$ could be made on several of the $\boldsymbol{n_j}$ existing markets, $j = \overline{1,n}$. The profitability function is defined in the form and with the purpose:

$$R(U,X,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_j} v_j^l \min\{u_j^l; y_j^l\} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_i} r_i^s\, x_i^s \rightarrow \max\,(\mathrm{u,x}) \tag{1_5}$$

unde:

U – masivul de ofertă a bunurilor pe cele $\boldsymbol{n_j}$ piețe ($j = \overline{1,n}$), care urmează de a fi determinată;

y_j^l – cererea pentru bunul j pe piața l ; v_j^l– venitul unitar (venitul obținut prin comercializarea unei unități de produs $\boldsymbol{j}$ pe piața l) ; x_i^s – cantitatea de resurse *i* necesară de a fi procurată pe piața *s*; r_i^s – prețul resursei *i* pe piața *s*; a_{ij} – coeficienții tehnologici; b_i – disponibilul resursei *i*.

Factorii de decizie în acest model sunt masivele *U* și *X*, care au aspectele:

where:

U – the massive supply of goods on the $\boldsymbol{n_j}$ markets ($j = \overline{1,n}$), which is to be determined;

y_j^l – the demand for good *j* in market *l* ; v_j^l– unit income (the income obtained by selling a unit of product *j* on the market *l*); x_i^s – the amount of resources *i* needed to be procured on the market *s*; r_i^s – the price of resource *i* on the market *s*; a_{ij} – technological coefficients; b_i – resource availability *i*.

The decision makers in this model are the *U* and *X* arrays, which have the aspects:

$$U = (u_1^1, \dots u_1^{n_1}; \dots; u_j^1, \dots, u_j^{n_j}; \dots; u_n^1, \dots u_n^{n_n});$$
$$X = (x_1^1, \dots x_1^{m_1}; \dots; x_i^1, \dots, x_i^{m_i}; \dots; x_m^1, \dots x_m^{m_m}).$$

Restricțiile din model sunt următoarele:

The restrictions in the model are as follows:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{l=1}^{n_j} u_j^l \le b_i + \sum_{s=1}^{m_i} x_i^s\ ,\ i = 1,2,..,m \tag{2_5}$$

$$0 \le \underline{u_j} \le \sum_{l=1}^{n_j} u_j^l \le \bar{u}_j\ ,\ j = \overline{1,n} \tag{3_5}$$

$$0 \le u_j^l \le \bar{u}_j \tag{4_5}$$

$$0 \le x_i^s \le \overline{x_i^s}\ ,\ s = \overline{1,m_i}\ ;\ i = \overline{1,m} \tag{5_5}$$

În aceste circumstanțe, funcția de poluare capătă următorul aspect:

Under these circumstances, the pollution function takes on the following appearance:

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \cdot u_j.$$

Restricția pentru funcția de poluare este de forma:

The restriction for the pollution function is of the form:

$$\varphi(u) \le \bar{\varphi}. \tag{6_5}$$

În ansamblu, problema dată s-ar putea aborda și astfel. De realizat un proces optimal, în vederea maximizării rentabilității sistemului de producție, luând strict în considerare poluarea mediului, condiționată de următoarele activități: transportul resurselor de la furnizori spre întreprindere; prelucrarea resurselor; transportul produselor finale spre piețele de desfacere.

Interpretări geometrice la unele probleme cu restricții la poluare

Maximizarea venitului (figura 2).

Overall, the given problem could also be approached in such a way so as to achieve an optimal process, in the vision of maximizing the profitability of the production system, strictly taking into account environmental pollution, conditioned by the following activities: the transport of resources from suppliers to the enterprise; the processing of resources; the transport of final products to the markets.

Geometric interpretations of some problems with pollution restrictions

Maximizing income (figure 2).

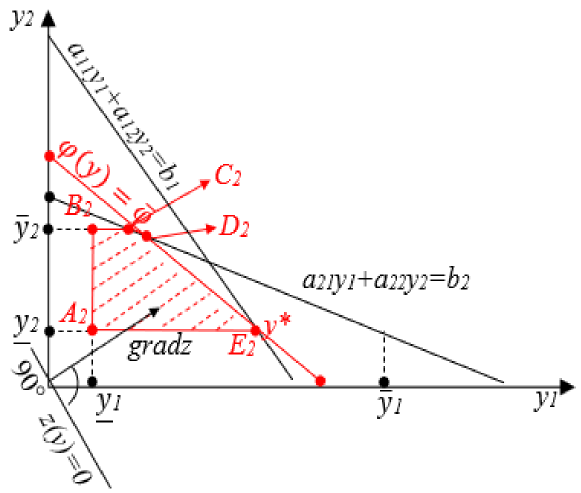

Figura 2. Domeniul valorilor admisibile este poligonul $A_2B_2C_2D_2E_2$. Soluția optimă este $y^* = E_2$/
Figure 2.The range of admissible values is the polygon $A_2B_2C_2D_2E_2$. The optimal solution is $y^* = E_2$.
Sursa*: elaborată de autori în baza proprietăților modelelor liniare de optimizare* [3]/
Source: *developed by the authors based on the properties of linear optimization models* [3]

Minimizarea funcției cost (figura 3).

Minimizing of the cost (figure 3).

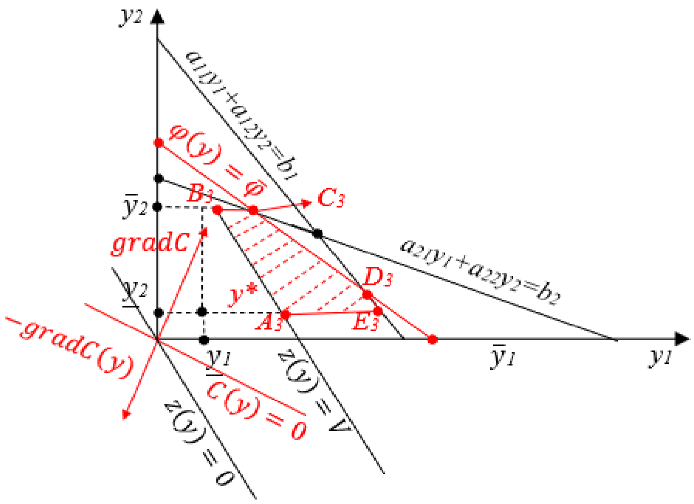

Figura 3. Domeniul valorilor admisibile este poligonul $A_3B_3C_3D_3E_3$. Soluția optimă este $y^* = A_3$/
Figure 3.The range of admissible values is the polygon $A_3B_3C_3D_3E_3$. The optimal solution is $y^* = A_3$.
Sursa*: elaborată de autori în baza proprietăților modelelor liniare de optimizare* [3]/
Source: *developed by the authors based on the properties of linear optimization models* [3]

Minimizarea funcției de poluare (figura 4).

Minimizing the pollution function (figure 4).

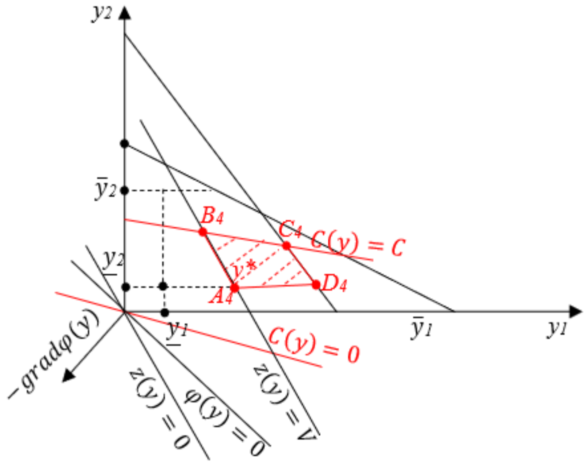

Figura 4. Domeniul valorilor admisibile este patrulaterul $A_4B_4C_4D_4$. Soluția optimă $y^* = A_4$/
Figure 4.The domain of admissible values is the quadrilateral $A_4B_4C_4D_4$.
The optimal solution is $y^* = A_4$.

Sursa: *elaborată de autori în baza proprietăților modelelor liniare de optimizare* [3].
Source: *developed by the authors based on the properties of linear optimization models* [3]

Studiu de caz: *maximizarea funcției de venit.*

Fie $n = 2$, $m = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $b_1 = 12$, $b_2 = 16$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$, $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.1$, $\bar{\varphi} = 0.6$, $V = 12$. Astfel, funcția de venit $z(y) = 3y_1+4y_2$, iar funcția de poluare $\varphi(y) = 0.1y_1+0.3y_2$.

Prin urmare, se obține următorul model:

Case study: maximizing the income function.

Let $n = 2$, $m = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $b_1 = 12$, $b_2 = 16$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$, $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.1$, $\bar{\varphi} = 0.6$, $V = 12$. Thus, the income function $z(y) = 3y_1+4y_2$, and the pollution function $\varphi(y) = 0.1y_1+0.3y_2$.

Therefore, the following model is obtained:

$$z(y) = 3y_1+4y_2 \rightarrow max$$
$$2y_1+3y_2 \leq 12 ; 3y_1+4y_2 \leq 16;$$
$$\varphi(y) = 0.3y_1+0.1y_2 \leq 0.6; y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0.$$

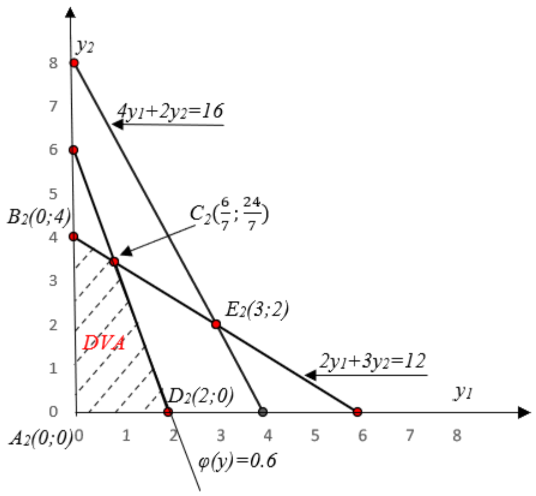

Figura 5. Reprezentarea geometrică din studiul de caz/
Figure 5. Geometric representation from the case study

Sursa: *elaborată de autori în baza proprietăților modelelor liniare de optimizare* [3]/
Source: *developed by the authors based on the properties of linear optimization models* [3]

Analizând situația dată (figura 5), se constată că soluția optimă (care corespunde venitului maxim) este punctul $y^* = C_2(\frac{6}{7}; \frac{24}{7})$, iar valoarea optimă a funcției scop $z(y^*) = 16\frac{2}{7}$. Dacă nu s-ar lua în considerare restricția de poluare, atunci soluția optimă ar fi $y^* = E_2(3;2)$ și venitul maximal ar fi $Z_{max} = 17$.

Remarcă. În studiul de caz realizat s-a operat cu date convenționale. În următoarele cercetări, acumulând date statistice, se vor analiza modele similare pentru situații reale.

Concluzii. Considerăm că funcțiile de poluare ar putea fi deduse, cercetând procesele concrete de producere și cele care ar descrie aspectele de transportare a resurselor de la furnizori spre producători, dar și de la producători către consumatori. Desigur, nu este vorba despre o deducere trivială, ba din contra, s-ar cere anumite eforturi și costuri pentru a stabili caracterul acestor dependențe, care dacă ar fi ignorate ar duce la consecințe negative. Însă, la nivel de model, problemele deja pot fi soluționate. Pentru aceasta sunt dezvoltate concepte, metode, rețele de calcul, toate fiind în așteptarea rezolvării problemelor reale, prin care s-ar reduce esențial emisiile nocive.

Analysing the given situation (figure 5), it is found that the optimal solution (corresponding to the maximum income) is the point $y^* = C_2(\frac{6}{7}; \frac{24}{7})$, and the optimal value of the objective function $z(y^*) = 16\frac{2}{7}$. If the pollution constraint were not taken into account, then the optimal solution would be $y^* = E_2(3;2)$ and the maximum revenue would be $Z_{max} = 17$.

Remark. In the given case study, it was operated with conventional data. In the following research, accumulating statistical data, similar models for real situations will be analysed.

Conclusions. We believe that the pollution functions could be deduced by researching the concrete production processes and those that would describe the aspects of transporting resources from suppliers to producers, but also from producers to consumers. Of course, this is not a trivial deduction. On the contrary, certain efforts and costs would be required to establish the nature of these dependencies. However, the negative consequences if such effects were to be ignored are very important. But, at the model level, the problems can already be solved. For this, concepts, methods, computing networks are developed, all pending the solution of real problems, which would essentially reduce harmful emissions.

Bibliografie/ Bibliography:

1. JOHANNES ANDRÉEA, Bo Pieter, CHAMORROA, Andres, SPENCERA, Phoebe, KOOMENB, Eric, DOGOA, Harun. Revisiting the relation between economic growth and the environment; a global assessment of deforestation, pollution and carbon emission. Renewable and Sustainable Energy Reviews,Volume 114, October 2019, https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.06.028Get rights and content
2. MÜLLERA, Sarah; WESTKÄMPER, Engelbert. Modelling of Production Processes: A Theoretical Approach to Additive Manufacturing. Procedia CIRP 72 (2018) pp.1524-1529, *51st CIRP Conference on Manufacturing Systems* https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.03.010
3. GAMEȚCHI, Andrei, SOLOMON, Dumitru. *Cercetări operaționale*. Volumul I. Chișinău, „Evrica", 2015. ISBN: 978-9975-3061-8-8.
4. INTRILIGATOR, Michael, D. *Econometric Models, Techniques, and Applications*. Edition: View all formats and editions, Publisher: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978, 638 pag. ISBN: 9780132232555.

5. GODONOAGĂ, Anatol; BARACTARI, Anatolie. *Modele economice nediferențiabile. Aspecte decizionale*. Chișinău: Editura ASEM, 2011. ISBN 978-9975-75-575-7.
6. ГОДОНОГА, А. Ф.; БЛАНУЦА, Ш. А.; ЧУМАКОВ, Б. М. *Алгоритм настройки входных и выходных потоков в процессе производства. Теорія оптимальних рішень*. Київ, 2019, стр. 34-39, ISSN 2616 – 5619.
7. SHOR, N. Z. *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1998. ISBN: 978-0792349976.
8. BLANUȚA, Ștefan; GODONOAGĂ, Anatol; ROLLER A.. Unele precizări cu privire la modelele de producție și cele de transport. În: *Conferința Științifică Internațională „Competitivitate și inovare în economia cunoașterii”* Ediția a XXII-a 25-26 septembrie 2020, Rezumate, pp.69-70. ISBN 978-9975-75-986-1.
9. BLANUȚA, Ștefan; CIUMACOV, Boris; GODONOAGĂ, Anatol. Modele de producție și funcții de poluare. In: *International Scientific Conference „Matematical Modeling, Optimization and Information Tehnologies*”, 15-19 november, 2021, Chișinău-Kiev-Batumi. Chișinău. CEP USM. 2022, pp. 17-19.
10. BARACTARI, Anatolie; BLANUȚA, Ștefan; GODONOAGĂ Anatol. Model al transporturilor cu restricții la emisiile nocive. In: *International scientific conference “30 years of economic reforms in the Republic of Moldova: Economic progress via innovation and competitiveness*” September 24-25, 2021, Vol. 3, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 238-240. ISBN 978-9975-155-66-3.