DOI: https://doi.org/10.53486/9789975155663.23
CZU: 514.116

THE PROBLEM OF REPRESENTATION OF A POLIGONAL DOMAIN AS A UNION OF THE MINIMUM NUMBER OF CONVEX POLIGONS

PROBLEMA REPREZENTĂRII DOMENIILOR POLIGONALE CA REUNIUNE A UNUI NUMĂR MINIM DE POLIGOANE CONVEXE

Anatolie PRISĂCARU[48], PhD.

Abstract: *The problem of partition of a poligonal domain with arbitrary holes into a minimal number of convex parts is solved. It is show that this minimal number equals m+c-h-e, where m, c, h and e are respectively the measure of local nonconvexity, the number of connected components, the number of formal holes, and the effective number of region.*
Key words: *metric, metric space, d-segment, convex set, convex hull, graph, k-partite graph.*

JEL CLASSIFICATION: C 65

1. Introducere

Problema prezentării unui poligon ca reuniune a unui număr minimal de poligoane convexe şi disjuncte a fost cercetată în lucrările (Cornienco, 1978), (Prisăcaru, 1982), (Soltan1994). În prezenta lucrare este prezentată o generalizare a rezultatelor de mai sus.

Fie P un domeniu poligonal închis (posibil multiconex) din planul de coordonate E. Prin frontiera topologică bdP a lui P vom înţelege reuniunea unui număr finit de contururi simple, astfel, că fiecare două dintre ele pot fi situate sau unul în interiorul celuilalt, sau unul în afara celuilalt şi pot avea doar vârfuri comune.

Punctul $x \in E$ îl vom numi interior pentru P, dacă el se conţine în interiorul unui număr impar de contururi, ce formează bdP. Mulţimea tuturor punctelor interioare a lui P formează interiorul topologic $\operatorname{int} P$.

Familia finită de segmente închise $s_1,\ldots,s_u$ şi familia finită de puncte izolate $v_1,\ldots v_t$ din P, ce satisfac condiţiile:

1) $v_1,\ldots v_t$ aparţin mulţimii $\operatorname{int} P \setminus (s_1,\ldots,s_u)$,
2) interiorul fiecărui s_i se conţine în $\operatorname{int} P$,
3) dacă segmentele s_i şi s_j au un punct comun, atunci el este vârf pentru ambele segmente se numeşte ornamentul lui P şi se notează OrP.

În cele ce urmează vom întroduce o topologie nestandardă în planul E.

Definiţia 1. Mulţimile $BdP := OrP \bigcup bdP,\ IntP := P \setminus BdP$ se numesc respectiv frontieră formală şi interiorul formal al lui P. Fiecare componentă conexă şi mărginită a mulţimii $E \setminus IntP$ se numeşte gaură formală a lui P, iar componenta nemărginită a lui $E \setminus IntP$ se numeşte exteriorul formal al lui P şi se notează $ExtP$.

Din definiţia de mai sus urmează, că BdP, $ExtP$ şi fiecare gaură formală a lui P sunt mulţimi închise, iar $IntP$ este o mulţime deschisă. De obicei gaura topologică a lui P este definită ca o componentă închisă a lui $E \setminus P$. Să observăm, că găurile topologice nu depind de alegerea lui OrP.

Acum vom defini o partiţie a lui P în poligoane convexe.

[48]Conferenţiar universitar, doctor în matematică, Academia de Studii Economice a Moldovei, Republica Moldova, mun. Chişinău, str. Mitropolit Gavriil Bănulescu-Bodoni, 61, MD-2005,Tel. (+37322) 224128; www.ase.md. Datele de contact ale autorului: Tel. (+37322) 402987, e-mail: prisacaru@ase.md

Definiţia 2. Vom spune că poligonul P este divizat în poligoanele convexe $R_1,...,R_q$, dacă: $\bigcup_{i=1}^{q} \operatorname{int} R_i \subset IntP \subset \bigcup_{i=1}^{q} R_i$, $IntR_i \cap IntR_j = 0$ pentru $i \neq j$

Cu alte cuvinte poligoanele convexe $R_1,...,R_q$ sunt o partiţie a lui P, dacă reuniunea lor coincide cu P şi frontiera formală BdP se conţine în reuniunea frontierelor poligoanelor $R_1,...,R_q$.

Definiţia 3. Punctul w se numeşte vârf al lui P, dacă se îndeplineşte măcar una din condiţiile: 1) w este vârf al unui contur, ce formează BdP. 2) w este un vârf al segmentului s_i, ce formează OrP. 3) w este un punct izolat din OrP. Mulţimea tuturor vârfurilor lui P o vom nota cu $V(P)$.

Definiţia 4. Segmentul închis $[x,z]$, $x \neq z$, se numeşte segment elementar al lui BdP, dacă $[x,z] \subset BdP$ şi $[x,z] \cap V(P) = \{x,z\}$. Mulţimea tuturor segmentelor elementare din BdP o vom nota cu $S(P)$.

Din definiţie rezultă, că dacă două segmente elementare $t_i, t_j \in S(P)$ au un punct comun, atunci el este vârf al ambelor segmente.

Observaţia 1. Poligonul P se consideră a fi determinat, dacă sunt cunoscute mulţimile $\operatorname{int} P$, BdP, $V(P)$. Uşor de observat, că BdP, şi $V(P)$ determină univoc $S(P)$.

2. Măsura de neconvexitate locală

Fiecare vârf v (dacă nu este un punct izolat din BdP) este vârful a cel puţin unui unghi interior a lui P. Fiecare unghi interior a lui P cu vârful în v este mărginit de două segmente elementare de forma $[u,v]$, $[v,w]$. Vom permite ca laturile unui unghi interior să coincidă (în aşa caz mărimea unghiului o vom considera de 2π). Uşor de observat, că fiecare unghi interior nu întrece mărimea de 2π. Unghiurile de mărimea mai mare ca π le vom numi concave.

Definiţia 5. Vârful v din P se numeşte punct de neconvexitate locală, dacă el este un punct izolat din BdP sau vârful unui unghi interior concav; în caz contrar se numeşte punct de convexitate locală a lui P.

Definiţia 6. Măsura de neconvexitate locală $m(v)$ a vârfului v din poligonul P se defineşte astfel:

1) $m(v) = 0$, dacă v este un punct de convexitate locală,
2) $m(v) = 1$, dacă v este un punct de neconvexitate locală, dar nu este un punct izolat,
3) $m(v) = 2$, dacă v este un punct izolat din BdP.

Fie $m(P) := \sum m(v)$, unde se sumează după mulţimea $V(P)$ a tuturor vârfurilor lui P. Numărul $m(P)$ se numeşte măsura de neconvexitate locală a lui P.

Acum vom demonstra două leme care ne vor fi de folos mai jos.

Lema 1. Orice gaură formală a poligonului P conţine cel puţin un punct de neconvexitate locală din P.

Demonstraţie. Fie H o gaură formală din P. Uşor de observat, că vârful v al lui H, pentru care suma $X + Y$ a coordonatelor (X,Y) primeşte valoare maximală, este un punct de neconvexitate locală a lui P.

Lema 2. Poligonul P nu are puncte de neconvexitate locală, dacă şi numai dacă fiecare componentă a lui $IntP$ este un poligon convex şi deschis, adică dacă BdP divizează P în poligoane convexe.

Demonstraţie. Poligonul P nu are puncte de neconvexitate locală, dacă şi numai dacă BdP nu are puncte izolate şi fiecare unghi interior este nu mai mare decât π. De aici şi rezultă afirmaţia din Lema 2.

3. Coarde efective.

În cele ce urmează vom descrie nişte segmente ce joacă un rol important în divizarea unui poligon arbitrar într-un număr minimal de poligoane convexe.

Definiţia 7. Segmentul $[v,w]$ se numeşte coardă efectivă, dacă se îndeplinesc următoarele condiţii:

1) v şi w sunt vârfuri de neconvexitate locală,
2) intervalul $]v,w[$, cu excepţia poate a unui număr finit de puncte, se conţine în $IntP$,
3) dacă P' se obţine din P prin adăugarea la BdP a segmentului $[v,w]$, atunci $m'(v)=m(v)-1$ şi $m'(w)=m(w)-1$ ($m'(x)$ este măsura de neconvexitate locală a lui x în P')
4) dacă $x \in BdP$ aparţine şi lui $]v,w[$, atunci x este vârful comun al unor segmente elementare, ce se află în unul din semiplanele generate de dreapta, care conţine segmentul $[v,w]$.

Observaţia 2. Orice două coarde efective din P au cel mult un punct comun. Partea proprie a unei coarde efective nu poate fi coardă efectivă.

Definiţia 8. O familie de coarde efective din P se numeşte admisibilă, dacă orice două coarde necoliniare nu se intersectează. Numărul maximal de coarde efective, ce formează o familie admisibilă se numeşte efectul poligonului P şi se notează cu $e(P)$.

Observaţia 3. Dacă două coarde efective ale unei familii admisibile din P au un punct comun, atunci aceste coarde sunt coliniare şi punctul lor comun este un vârf izolat din BdP.

4. Adăugarea segmentelor la frontiera formală

Fiecare partiţie a unui poligon P în poligoane convexe poate fi considerată ca o procedură de adăugare consecutivă a unor segmente închise la frontiera formală BdP a lui. Mai jos vom cerceta unele proprietăţi ale acestor adăugari.

Fie $[x,z] \subset P$ un segment închis, astfel, că intersecţia lui $[x,z]$ cu BdP este o mulţime finită. Vom spune, că poligonul P' se obţine din P prin adăugarea segmentului $[x,z]$ la BdP, dacă:

1) $BdP' := BdP \bigcup [x,z],$
2) $IntP' := IntP \setminus [x,z],$
3) $V(P') := V(P) \bigcup \{x,z\} \bigcup (OrP \bigcap [x,z]),$
4) $x,z \in BdP.$

Observaţia 4. Segmentul $[x,z]$, care se adaugă la BdP, în general nu este un segment elementar din BdP', el însă este o reuniune de segmente elementare din BdP'.

Vom spune, că adăugarea segmentului $[x,z] \subset P$ la BdP micsorează cu o unitate măsura $m(z)$ în P a vârfului $z \in V(P)$, dacă $m'(z)=m(z)-1,$ unde cu $m'(z)$ se notează măsura în P' a lui z.

Lema 3. Fie P' este un poligon obţinut din P prin adăugarea la BdP a segmentului $[x,w] \subset P$, astfel, că $w \in P$. Atunci $m(w)-1 \le m'(w) \le m(w),$ unde $m'(w)$ este măsura în P' a lui w.

Demonstraţie. Dacă w este un punct de convexitate locală din P, atunci evident $m(w)=m'(w)=0$. Fie acum w un punct de neconvexitate locală din P, dar nu un punct izolat din BdP. Atunci w este vârful unui unghi interior concav. Fie acum $[x,w]$ împarte acest unghi în două unghiuri interioare. Dacă unul din ele este concav, atunci $m(w) = m'(w) = 1$. Dacă ambele unghiuri sunt convexe, $m(w) - 1 = m'(w) = 0$.

Presupunem acum, ca w este un punct izolat din BdP. Atunci w este vârful unui singur segment elementar $[u, w] \in S(P')$ (evident $[u, w]$ se conţine în $[x, w]$). În acest caz $m(w) - 1 = m'(w) = 1$.

Lema 4. Fie $[v, w]$ o coardă efectivă a poligonului P, iar $x_1, \ldots, x_r$ sunt toate vârfurile din P, care se conţin în $[v, w]$. Adăugarea lui $[v, w]$ la BdP micsorează cu o unitate măsura în P a tuturor vârfurilor $v, w, x_1, \ldots, x_r$.

Demonstraţie. x_i este capătul a cel puţin unui segment elementar, fie $[x_i, z_i]$. Din Definitia 7 rezultă, că $m(x_i) = 1$ pentru toţi $i = 1, \ldots, r$.

Notăm cu P' poligonul, ce se obţine din P adăugând la BdP segmentul $[v, w]$. Faţă de P' fiecare x_i este vârful a cel puţin trei unghiuri interioare convexe (unul de mărimea π, iar celelalte mai mici decât π). Deaceea x_i devine punct de convexitate locală în P' şi $m'(x_i) = 0$. ($m'(x_i)$ este măsura în P' a lui x_i). De aici $m'(x_i) = m(x_i) - 1$.

Dacă v este un punct izolat din BdP, atunci v este vârful unui singur segment elementar de forma $[v, x_i] \in S(P')$. Astfel $m'(v) = m(v) - 1 = 1$. Fie acum v nu este un punct izolat din BdP. Atunci v este vârful unui segment elementar, să zicem $[u, v]$ (vezi condiţia 2) din Definiţia 7). În aşa caz, v este un punct de convexitate locală pentru P' şi $m'(v) = m(v) - 1 = 0$. Analog $m'(w) = m(w) - 1 = 0$.

În continuare vom introduce:

Definiţia 9. Segmentul $[x, z]$ se numeşte coardă simplă, dacă se îndeplinesc următoarele condiţii:

1) $x, z \in BdP$
2) intervalul deschis $]x, z[$ se conţine în $IntP$.

Observaţia 5. Din Definiţiile 4 şi 9 rezultă, că dacă o coardă simplă $[x, z]$ din P este adăugată la BdP, atunci ea devine un segment elementar pentru poligonul P' astfel, că $BdP = BdP \cup [x, z]$, $IntP' = IntP \setminus]x, z[$, $V(P') = V(P) \cup \{x, z\}$.

Lema 5. Pentru orice vârf v de neconvexitate locală a poligonului P există o coardă simplă $[v, z]$ din P, a cărei adăugare la BdP micsorează cu o unitate măsura $m(v)$.

Demonstraţie. Vârful v este sau un punct izolat din BdP, sau vârful unui unghi interior concav al lui P. Dacă v este un punct izolat din BdP, atunci vom alege un segment $[v, z]$ astfel, că $z \in BdP$ şi $]v, z[\subset IntP$. Coarda $[v, z]$ este simplă pentru P şi $m'(v) = 1$ ($m'(v)$ este măsura lui v în poligonul P' obţinut din P prin adăugarea segmentului $[v, z]$ la BdP). În acest caz $m(v) - 1 = 1$.

Fie acum v un vârf al unui unghi concav din P format de segmentele $[u, v]$ şi $[v, w]$. Vom alege coarda $[z, v]$ astfel, ca:

1) $[z, v]$ să fie coliniară lui $[v, w]$ şi $v \in]z, w[$,
2) $z \in BdP$ şi $]z, v[\subset IntP$

Coarda $[z, v]$ este simplă pentru P şi $m'(v) = m(v) - 1 = 0$. ◊

5. Decompoziţia ornamentului suplimentar

Fie, că poligonul P este divizat în poligoanele convexe $R_1,...,R_q$ cu ajutorul procedurii de adăugare a segmentelor, descrisă în compartimentul precedent. Vom nota cu $L_1,...,L_q$ contururile de frontieră ale poligoanelor $R_1,...,R_q$ respectiv, şi fie $L := L_1 \cup ... \cup L_q$.

Cu W vom nota mulţimea vârfurilor poligoanelor $R_1,...,R_q$. Să observăm, că $V(P) \cup W$ împarte mulţimea L într-o familie S de segmente închise. Deaceea noi putem considera L ca o frontieră formală a poligonului P_0, pentru care $BdP_0 = L$, $IntP_0 = IntP \setminus L$, $V(P_0) = V(P) \cup W$, $S(P_0) = S$.

Evident, P şi P_0 au acelaşi interior topologic şi frontieră topologică, iar fiecare componentă conexă din $IntP_0$ este interiorul căruiva poligon convex R_i.

Cum a fost menţionat mai sus, poligonul P_0 poate fi obţinut din P prin adăugarea la BdP a unor segmente închise. În acest compartiment vom cerceta procedura inversă: a obţine P din P_0 prin excluderea unor intervale deschise din BdP_0. Vom studia deci "ornamentul suplimentar" $Y := L \setminus BdP$..

Lema 6.(Soltan1994) Mulţimea $Y = L \setminus BdP$ poate fi descompusă într-o mulţime de intervale deschise şi disjuncte două câte două.

Definiţia 10. Pentru orice decompoziţie a mulţimii $Y = L \setminus BdP$ într-o mulţime de intervale deschise şi disjuncte $l_i =]x_i, z_i[$, $i = 1,...,k$, definim numerele $\mu_i(l_i)$, $i = 1,...,k$ în felul următor:

1) $\mu_i(l_i) = 0$, dacă $x_i \notin V(P)$ şi $z_i \notin V(P)$,
2) $\mu_i(l_i) = m_i(x_i) - m_{i-1}(x_i)$, dacă $x_i \in V(P)$ şi $z_i \notin V(P)$,
3) $\mu_i(l_i) = m_i(z_i) - m_{i-1}(z_i)$, dacă $x_i \notin V(P)$ şi $z_i \in V(P)$,
4) $\mu_i(l_i) = [m_i(x_i) - m_{i-1}(x_i)] + [m_i(z_i) - m_{i-1}(z_i)]$, dacă $x_i \in V(P)$ şi $z_i \in V(P)$, unde $m_j(w)$ este măsura vârfului $w \in V(P)$ în P_j.

Să observăm, că $0 \le m_i(x_i) - m_{i-1}(x_i) \le 1$, $0 \le m_i(z_i) - m_{i-1}(z_i) \le 1$

Atunci din Definiţia 10 obţinem:

Observaţia 6.

$0 \le \mu_i(l_i) \le 2$ pentru orice $i = 1,...,k$,

$\mu_i(l_i) \le 1$, dacă cel mult unul din x_i, z_i este din $V(P)$,

$\mu_i(l_i) = 0$, dacă ambele vârfuri x_i, z_i nu sunt din $V(P)$.

Observaţia 7. Valorile lui $\mu_i(l_i)$, $i = 1,...,k$ depind de numerotarea segmentelor l_i.

Este cunoscut rezultatul:

Teorema 1. (Soltan1994) Fie $\Im = \{l_1,...,l_k\}$ o decompoziţie a mulţimii $Y = L \setminus BdP$ într-o mulţime de intervale deschise şi disjuncte două câte două. Intervalele $l_1,...,l_k$ pot fi numerotate astfel, că $0 \le \mu_i(l_i) \le 1$ pentru cel puţin $k - e$ din ele, unde e este efectul lui P.

6. Rezultate auxiliare

În acest compartiment vom studia "ornamentul suplimentar" $Y = L \setminus BdP$. Fie $\Im = \{l_1,...,l_k\}$ este decompoziţia lui Y în intervale disjuncte două câte două.

Lema 7. $m(P) = \mu_1(l_1) + ... + \mu_k(l_k)$

Demonstraţie. Dacă vârful $w \in V(P)$ nu este capăt al intervalului l_i, atunci conform Definiţiei 6 $m_i(w) = m_{i-1}(w)$. Prin urmare pentru $i = 1,...,k$ $\mu_i(l_i) = \sum'[m_i(w) - m_{i-1}(w)]$, unde suma se ia dupa mulţimea tuturor vârfurilor din P.

Conform Lemei 2, P_0 nu are puncte de neconvexitate locală. Deaceea $m_0(w) = 0$ pentru fiecare vârf w din P. În compartimentul precedent a fost menţionat, că $BdP_k = BdP$, deaceea $m_k(w) = m(w)$ pentru toţi $w \in V(P)$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i(l_i) = \sum_{i=1}^{k} (\sum'[m_i(w) - m_{i-1}(w)] = \sum' m_k(w) = \sum' m(w) = m(P)$$

Lema 8. Pentru numărul k de intervale deschise $l_1,...,l_k$, ce descompun mulţimea Y, se satisface relaţia $k \geq m - e$, unde m este măsura de neconvexitate locală a lui P iar e este efectul lui P.

Demonstraţie. Conform Teoremei 1, intervalele $l_1,...,l_k$ pot fi renumerotate cu indicii $1,...,k,$ astfel, că $\mu_i(l_i) \leq 1$ pentru cel puţin $k - e$ din ele. Notăm $\Im_r = \{l_i \in \Im : \mu_i(l_i) = r\},$ $r = 0,1,2.$ Deoarece $0 \leq \mu_i(l_i) \leq 2$ pentru toţi $i = 1,...,k,$ vom avea $\Im = \Im_0 \cup \Im_1 \cup \Im_2$ şi $\mu_1(l_1) + ... + \mu_k(l_k) = |\Im_1| + 2|\Im_2|$.

Din cele demonstrate anterior, $|\Im_2| \leq e$. Acum ţinând cont de Lema 8 avem $k = |\Im_0| + |\Im_1| + |\Im_2| \geq (|\Im_1| + 2|\Im_2|) - |\Im_2| = \mu_1(l_1) + ... + \mu_k(l_k) - |\Im_2| \geq m - e.$

Lema ce va urma conţine o altă estimaţie pentru numărul k de intervale deschise $l_1,...,l_k$ din "ornamentul suplimentar".

Să notăm cu α_0 şi α_1, respectiv numărul de vârfuri şi numărul de segmente elementare ale poligonului P. Numerele respective pentru P_0 le vom nota cu β_0 şi β_1.

Lema 9. Daca mulţimea $Y = L \setminus BdP$ se reprezintă ca o reuniune a intervalelor deschise $l_1,...,l_k$, disjuncte două câte două, atunci $k = (\beta_1 - \alpha_1) - (\beta_0 - \alpha_0)$.

Demonstraţie. Vom reprezenta β_0 şi β_1 sub forma $\beta_0 = \gamma_0 + \delta_0$, $\beta_1 = \gamma_1 + \delta_1$, unde γ_0, γ_1 sunt respectiv numărul de vârfuri din P_0 situate în Y şi numărul de segmente elementare, ce se conţin în închiderea $\overline{Y}$, iar δ_0, δ_1 sunt respectiv numărul de vârfuri din P_0 şi numărul de segmente elementare din BdP_0, ce se conţin în BdP. Fiecare interval l_i poate fi descompus în felul următor:

$$l_i =]v_1, v_2[\cup \{v_2\} \cup ... \cup \{v_{r-1}\} \cup]v_{r-1}, v_r[, \ r \geq 2,$$

unde $[v_i, v_{i+1}]$, $i = 1,...,r-1$ sunt segmente elementare din BdP_0, şi $v_1,...,v_r$ sunt vârfuri din P_0; adică l_i conţin interiorul a $r-1$ segmente elementare din BdP_0 şi $r-2$ vârfuri din P_0. De aici $\gamma_1 - \gamma_0 = k$.

Dacă un segment elementar $[v,w]$ din BdP conţine în interiorul său careva vârfuri $x_1,...,x_q$ din P_0, atunci $[v,w]$ conţine $q+1$ segmente elementare din BdP_0. De aici obţinem $\delta_0 - \alpha_0 = \delta_1 - \alpha_1$ şi

$$(\beta_1 - \alpha_1) - (\beta_0 - \alpha_0) = (\gamma_1 - \gamma_0) + [(\delta_1 - \alpha_1) - (\delta_0 - \alpha_0)] = k .$$

7. Relaţia euler generalizată.

Lema ce urmează este o generalizare a relaţiei Euler.

Lema 10. Pentru poligonul P se satisface relaţia $\alpha_0 - \alpha_1 + c + h' = c' + h$, unde:

α_0 este numărul de vârfuri ale lui P,
α_1 este numărul de segmente elementare din BdP,
c este numărul de componente conexe din $IntP$,
c' este numărul de componente conexe din P,
h este numărul de găuri formale din P,
h' este numărul de găuri topologice din P.

Demonstraţie. Vom considera graful planar G, vârfurile şi muchiile cărui sunt respectiv vârfurile şi segmentele elementare ale poligonului P. Atunci G are α_0 vârfuri şi α_1 muchii. Vom nota cu q numărul de componente conexe ale mulţimii $E \setminus G$ (cu alte cuvinte, G împarte E în q domenii deschise şi conexe). Este bine cunoscută relaţia $q = \alpha_1 - \alpha_0 + p + 1$, unde p este numărul de componente conexe ale lui G. În notaţiile noastre, $q = h' + c + 1$, unde unitatea vine de la $ExtP$.

Noi vom demonstra egalitatea $p = c' + h$ prin inducţie după h. Cazul $h = 0$ este trivial: $p = c'$. Vom presupune, că relaţia $p = c' + h$ este adevărată pentru toate poligoanele cu cel mult $h \le l - 1$ găuri formale $(l \ge 1)$, şi fie P un poligon cu l găuri formale. Să presupunem, că H este o gaură formală din P. Atunci H este separată de alte găuri formale şi de $ExtP$ de o componentă conexă din $IntP$. Vom construi în Q un lanţ simplu $]x_1,...,x_m[$ astfel, că x_1 aparţine lui H, iar x_m aparţine unei alte găuri formale ori lui $ExtP$. În fiecare caz, adăugarea lanţului $[x_1,..,x_m]$ la BdP reduce cu o unitate ambele numere p şi l. Din presupunerea inducţiei $p - 1 = c' + l - 1$ şi atunci $p = c' + l$. În corespundere cu notaţiile făcute anterior avem $\alpha_0 - \alpha_1 + c + h' = c' + h$.

8. Numărul minimal de poligoane convexe

În cele ce urmeaza vom deduce o formulă de calculare a numărului minimal de poligoane convexe în care poate fi divizat poligonul P cu ajutorul adăugării la frontiera formală a unor coarde efective.

Teorema 2. Numărul minimal de poligoane convexe în care poate fi divizat poligonul P este egal cu $m + c - h - e$, unde:

m este măsura de neconvexitate locală a lui P,
c este numărul de componente conexe ale lui $IntP$,
h este numărul de găuri formale din P,
e este efectul poligonului P.

Demonstraţie. Fie r - numărul minimal de poligoane convexe în care poate fi divizat P. Mai întâi vom demonstra inegalitatea $r \le m + c - h - e$.

Fie $e > 0$, iar $[x_i, z_i]$, $i = 1,...,e$ o familie de coarde admisibile din P de putere maximală. Vom nota cu P_1 poligonul obţinut din P prin adăugarea la BdP a coardei $[x_1, z_1]$. În aşa caz unele vârfuri din P pot fi situate în intervalul $]x_1, z_1[$. Le vom nota respectiv $v_1,...,v_t$. Conform Definiţiei 7, fiecare v este capătul căruiva segment elementar din BdP necoliniar cu $[x_1, z_1]$. Deaceea adăugarea lui $[x_1, z_1]$ la BdP aduce la următoarele schimbări:

1)măsura de neconvexitate locală în P a vârfurilor $x_1, v_1,...,v_t, z_1$ se micsoreaza cu o unitate (vezi Lema 4),

2)numărul $h = h(P)$ de găuri formale ale lui P se micsoreaza cu p (≥ 0) unităţi şi numărul $c = c(P)$ de componente conexe ale lui $IntP$ se măreşte cu q (≥ 0) unităţi, astfel, încât $p + q = t + 1$,

3)numărul efectiv $e(P)$ se micsorează cel mult cu o unitate. În aşa caz

$m(P_1) = m - t - 2$, $c(P_1) = c + q$,

$h(P_1) = h - p$, $e(P_1) = e - 1$,

şi $m(P_1) + c(P_1) - h(P_1) - e(P_1) \leq m + c - h - e$.

Evident coardele $[x_i, z_i]$, $i = 2,...,e$ sunt coarde efective pentru P_1. După adăugarea coardelor $[x_i, z_i]$, $i = 2,...,e$ la BdP_1 vom obţine poligonul P_e, pentru care

$$BdP_e = BdP \cup (\bigcup_{i=1}^{e}[x_i, z_i]),\ V(P_e) = V(P).$$

Ca urmare $m(P_e) + c(P_e) - h(P_e) - e(P_e) \leq m + c - h - e.$

Să observăm, că $e(P_e) = 0$. Într-adevăr, dacă în P_e ar fi cel puţin o coardă efectivă l, atunci conform Definiţiei 7 familia $\{l, [x_i, z_i],\ i = 1,...,e\}$ ar fi o familie admisibilă de puterea $e + 1$ pentru P, ce este imposibil. Deaceea $m(P_e) + c(P_e) - h(P_e) \leq m + c - h - e$.

Fie acum $m(P_e) > 0$. Atunci în P_e este un careva punct u de neconvexitate locală. Conform Lemei 5, există o coardă simplă $[u, v]$ în P_e adăugarea căreia la BdP_e micsoreaza cu o unitate măsura lui $m(u)$ în P_e. Vom nota cu P' poligonul ce se obţine din P_e prin adăugarea coardei $[u, v]$ la BdP_e. Totodata adăugarea acestei coarde ori micsoreaza cu o unitate numărul $h(P_e)$ ori măreşte cu o unitate numărul $c(P_e)$. Aşa dar $m(P') + c(P') - h(P') \leq m + c - h - e$.

După aplicarea de mai multe ori a procedurii de adăugare a unei coarde simple vom obţine poligonul $\tilde{P}$, care nu are puncte de neconvexitate locală, adică $m(\tilde{P}) = 0$. Conform Lemei 1 $h(P) = 0$. Ca urmare obţinem

$$c(\tilde{P}) = m(\tilde{P}) + c(\tilde{P}) - h(\tilde{P}) - e(\tilde{P}) \leq m + c - h - e.$$

Conform Lemei 2 fiecare componentă din $IntP$ este un poligon deschis şi convex. Închiderea acestor poligoane este o partiţie a lui P în poligoane convexe. Deaceea $r \leq c(\tilde{P}) \leq m + c - h - e$.

Acum vom demonstra inegalitatea inversă. Fie Q un poligon obţinut din P prin adăugarea unor segmente la BdP, astfel, că BdQ divizează $IntQ$ în poligoane convexe. Notăm cu γ_0 şi γ_1 numărul de vârfuri şi de segmente elementare din Q. Conform Lemei 11 avem

$\alpha_0 - \alpha_1 + c + h' = c' + h$

$\gamma_0 - \gamma_1 + c(Q) + h'(Q) = c'(Q) + h(Q)$

pentru poligoanele P şi Q respectiv. Evident $h(Q) = 0,\ c'(Q) = c',\ h'(Q) = h'$.

Deaceea $c(Q) = c - h + [(\gamma_1 - \alpha_1) - (\gamma_0 - \alpha_0)]$.

Lemele 9 şi 10 ne dau $(\gamma_1 - \alpha_1) - (\gamma_0 - \alpha_0) = (k) \geq m - e.$

De aici $c(Q) \geq c - h + m - e$.

Aşa cum Q nu are puncte de neconvexitate locală, fiecare componentă conexă din $IntQ$ este un poligon deschis şi convex (vezi Lema 2). Închiderea acestor poligoane divizează Q (şi P) în $c(Q)$ poligoane convexe. Deci orice divizare a lui P conţine cel puţin $m + c - h - e$ poligoane convexe. În particular, $r \geq m + c - h - e$.

Bibliografie

1. Cornienco, N., Matveev, G., Metelskiy, N., Tishkevich, P. (1978). О разбиениях многоугольников. Изв. АН БССР, сер. физ-мат наук, N2, p. 25-29.
2. Prisăcaru, Ch., Soltan, P. (1982). О разбиениях плоской области на выпуклые части и его применения. //Докл. АН СССР, 262, N2, p. 271-273.
3. Soltan, V., Prisăcaru, A. (1994). Divizarea unui domeniu poligonal într-un număr minimal de poligoane convexe cu ajutorul secţiunilor de tip ghilotină. //USM, 25 pp.