FAVORIZAREA PARTIDELOR LA APLICAREA METODEI DIVIZOR LINIAR GENERAL

Prof. univ. dr. hab. Ion BOLUN, ASEM

Sunt cercetate aspectele de favorizare a partidelor la distribuirea mandatelor conform metodei Divizor liniar general (DLG). Sunt identificate condițiile de predispunere a unui partid aparte să favorizeze alte partide şi, de asemenea, faptul că predispunerea către favorizarea partidelor mici este crescătoare, iar a celor mari este descrescătoare față de creşterea valorii constantei c. Este definită condiția de echilibru Hamilton între două partide şi sunt descrise cazuri speciale de echilibru şi cvasi-echilibru Hamilton. Sunt identificate domeniile de favorizare prin metoda DLG a partidelor mari şi, aparte, a partidelor mici, în funcție de numărul de partide şi valorile mărimilor c şi ΔM. În medie, metoda DLG favorizează partidele mari la c < 2, partidele mici la c > 2 şi nu favorizează niciun partid la c = 2.

Cuvinte-cheie: *sisteme electorale, distribuirea mandatelor, disproporționalitate, metoda Divizor liniar general, favorizarea de partide.*

JEL: C61.

1. Introducere

Pentru distribuirea mandatelor între partide, în sistemele de vot pe liste de partid, se folosesc diverse metode. La distribuirea mandatelor, metodele aplicate pot favoriza unele partide, din contul altora [1, 2], sporind disproporționalitatea reprezentării drepturilor alegătorilor în organul electiv. În lucrare, se cercetează aspectele de favorizare a partidelor prin metoda Divizor liniar general (DLG) și metodele aferente.

2. Considerații preliminare

Problema distribuirii mandatelor constă în următoarele [3]. Fie: M – numărul total de mandate în organul electiv; n – numărul de partide care au atins sau depăşit pragul electoral; V – numărul total de voturi exprimate valabil pentru cele n partide; V_i – numărul de voturi exprimate în favoarea partidului i ($V_1 + V_2 + V_3 + \dots V_n = V$); x_i – numărul de mandate ce se alocă partidului i. Cunoscând mărimile (numere naturale pozitive): M; n; V_i, $i=\overline{1,n}$, se cere de determinat valorile mărimilor x_i ($i=\overline{1,n}$) – numere naturale, care ar asigura valoarea minimală a indicelui de disproporționalitate I_d

FAVORING PARTIES BY GENERAL LINEAR DIVISOR METHOD

Prof. Dr. Hab. Ion BOLUN, ASEM

Aspects of General Linear Divisor (GLD) method favoring of parties, when distributing seats, are investigated. They are identified predisposing conditions of a particular party to favor parties and also the fact that predisposition of favoring smaller parties is increasing, and of favoring of larger parties is decreasing with the increase of constant c value. The condition of Hamilton equilibrium between two parties is defined and special cases of Hamilton equilibrium and quasi-equilibrium are described. Are identified areas of GLD method favoring of larger and of smaller parties depending on the number of parties and on values of constant c and ΔM. On average, GLD method favors large parties at c < 2, small parties at c > 2 and did not favor any party at c = 2.

Key words: *electoral systems, distribution of seats, disproportionality, General linear divisor method, favoring of parties.*

JEL: C61.

1. Introduction

To distribute seats among parties in voting systems by party lists various methods are used. When distributing seats, used methods may favor some parties at the expense of others [1, 2], increasing the disproportionality of voters will representation in the elective body. In this paper, aspects of favoring parties by General Linear Divisor (GLD) method and related are examined.

2. Preliminary considerations

The problem of distribution of seats among parties can be formulated as follow [3]. Let: M – number of seats in the elective body; n – number of parties that have reached or exceeded the representation threshold; V – total valid votes cast for the n parties; V_i – total valid votes cast for party i ($V_1 + V_2 + V_3 + \dots V_n = V$); x_i – number of seats to be allocated to party i. Knowing parameters (natural positive numbers): M; n; V_i, $i=\overline{1,n}$, it is required to determine unknowns x_i ($i=\overline{1,n}$) – natural numbers, which will assure the minimum value of index of disproportionality I_d

$$I_d = \sum_{i=1}^{n} |v_i - m_i| \to \min, \text{ \% mandate,} \quad (1)$$

unde $v_i = 100 \cdot V_i/V$ este procentajul voturilor acumulate de partidul i, iar $m_i = 100 \cdot x_i/M$ – procentajul mandatelor distribuite partidului i, la respectarea restricțiilor:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M. \quad (2)$$

În [3] este demonstrat că minimizarea I_d este asigurată de metoda Hamilton. Aceasta, totodată, este neutră privind favorizarea de partide [2]. De aceea, poate fi oportună, uneori, examinarea calității de neutralitate a altor metode prin prisma comparării cu metoda Hamilton. În acest scop, în [2] este introdusă noțiunea de echilibru Hamilton: o distribuire de mandate se consideră de echilibru Hamilton, dacă aceasta coincide cu cea obținută la aplicarea metodei Hamilton – distribuirea Hamilton. De asemenea, conform Consecinței 1 din [2], pentru un partid i:

1) favorizat, are loc $x_i > a_i$,
   unde $a_i = \lfloor dV_i \rfloor = = \lfloor V_i/Q \rfloor$; (3)
2) defavorizat, are loc $x_i \le a_i$, la $V_i > a_iQ$; (4)
3) neutru, are loc $x_i = a_i$, la $V_i = a_iQ$. (5)

Metoda Divizor liniar general cercetată are la bază regula „voturi-decizie” (VD) [3]

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{V_i}{cu_i + 1} > \frac{V_k}{cu_k + 1}, \quad (6)$$

unde $c > 0$ este o constantă, iar u_j este numărul de mandate deja alocate partidului j.

3. Uniformizarea regulilor VD ale metodelor Hamilton şi DLG

În funcție de valoarea constantei c, metoda DLG poate favoriza atât partide mari (cu mai multe voturi), cât şi partide mici (cu mai puține voturi). Pentru compararea metodei DLG cu metoda Hamilton, este necesar de reprezentat aceste metode prin acțiuni mai apropiate. Astfel, se va modifica atât forma regulii VD (6) a metodei DLG, ca să fie comparabilă cu metoda Hamilton, cât şi procedura de alocare a mandatelor de către metoda Hamilton, ca să fie comparabilă cu metoda DLG.

În acest scop, metoda Hamilton se va realiza consecutiv, pe paşi, alocând pe rând câte un mandat, ca şi la metoda d'Hondt, conform regulii VD

$$i \succ k, \text{ dacă } \Delta U_i > \Delta U_k, \quad (7)$$

unde $\Delta U_j = V_j - Qu_j$. Astfel, conform regulii (7), mandatele se alocă tot după cele mai mari resturi,

$$I_d = \sum_{i=1}^{n} |v_i - m_i| \to \min, \text{ \% mandate,} \quad (1)$$

where $v_i = 100 \cdot V_i/V$ is the percentage of votes gained by party i, and $m_i = 100 \cdot x_i/M$ – the percentage of seats distributed to party i, in compliance with restrictions:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M. \quad (2)$$

In [3] it is proved that the minimization of I_d is provided by Hamilton method. This, however, is neutral with refer to favoring parties [2]. Therefore it may be, sometimes, appropriate to examine the property of neutrality of other methods through the comparison with Hamilton one. For this purpose in [2] is introduced the notion of Hamilton equilibrium: a distribution of seats is considered of Hamilton equilibrium, if it coincides with that obtained by Hamilton method – Hamilton distribution. Also, according to Consequence 1 of [2], for a party i:

1) favored, takes place $x_i > a_i$,
   where $a_i = \lfloor dV_i \rfloor = \lfloor V_i/Q \rfloor$; (3)
2) disfavored, takes place $x_i \le a_i$, at $V_i > a_iQ$; (4)
3) neutral, takes place $x_i = a_i$, at $V_i = a_iQ$. (5)

Examined GLD method is based on „votes-decision” (VD) rule [3]

where $c > 0$ is a constant, and u_j is the number of seats already allocated to party j.

3. Uniformization of Hamilton and DLG methods VD rules.

Depending on the value of constant c, DLG method can favor both large parties (with more votes) and small parties (with fewer votes). For comparison of DLG method with the Hamilton one, it is necessary to represent these methods by closer action. So, it will change both, the shape of DLG method VD rule (6), to be comparable to the Hamilton one, and the procedure for the allocation of seats by Hamilton method, to be comparable to the DLG.

For this purpose, Hamilton method will be carried out consecutively, on steps, allocating one by one seat, as by d'Hondt method, according to VD rule

where $\Delta U_j = V_j - Qu_j$. Thus, according to rule (7), seats are allocated also by largest remainders, but dar resturi nu față de $a_j = \lfloor V_j/Q \rfloor$, ca în regula VD Hamilton [3], ci față de u_j. Evident, la faza finală, când vor rămâne de distribuit ultimele ΔM mandate, vom avea $u_j = a_j$ şi $\Delta U_j = \Delta V_j = V_j - Qa_j$, $j = \overline{1,n}$. Pentru elucidarea favorizării de partide de metoda DLG, comparativ cu metoda Hamilton, prima este oportun de realizat tot în baza de resturi $\Delta U_i = V_i - Qu_i$, $i = \overline{1,n}$. În acest scop, înlocuind $V_i = Qu_i + \Delta U_i$ şi $V_k = Qu_k + \Delta U_k$ în regula VD (6), obținem:

remainders not to $a_j = \lfloor V_j/Q \rfloor$, as the Hamilton VD rule [3] does, but by u_j. Obviously, at final phase, when remain to be distributed the last ΔM seats, we have $u_j = a_j$ and $\Delta U_j = \Delta V_j = V_j - Qa_j$, $j = \overline{1,n}$. To elucidate the favoring of parties by DLG method, comparatively to Hamilton one, the first is appropriate to perform in the form of remainders $\Delta U_i = V_i - Qu_i$, $i = \overline{1,n}$. In this aim, replacing $V_i = Qu_i + \Delta U_i$ and $V_k = Qu_k + \Delta U_k$ in rule (6), we get:

$$i \succ k, \text{ dacă } (Qu_i + \Delta U_i)/(cu_i + 1) > (Qu_k + \Delta U_k)/(cu_k + 1),$$

de unde, în urma unor transformări simple, regula VD (6) obține forma

from where, as result of some simple transformations, VD rule (6) obtains the form

$$i \succ k, \text{ dacă } \Delta U_i > \frac{\Delta U_k (cu_i + 1) + Q(u_i - u_k)}{cu_k + 1}. \tag{8}$$

Fie $u_i = u_k + g$, $g > 0$, adică partidului i i-au fost distribuite deja mai multe mandate decât partidului k, ceea ce poate fi doar în cazurile că $V_i > V_k$ (partidul i este mai mare – are mai multe voturi, decât partidul k). Atunci regula (8) se transformă în

Let $u_i = u_k + g$, $g > 0$, ie to party i it have been already distributed more seats than to the k one, which can only be in cases that $V_i > V_k$ (party i is larger - has more votes, than the k one). Then the rule (8) turns into

$$i \succ k, \text{ dacă } \Delta U_i > \Delta U_k - g\frac{Q - c\Delta U_k}{cu_k + 1}. \tag{9}$$

Dacă, însă, $u_i = u_k - g$, $g > 0$, adică partidului i i-au fost distribuite mai puține mandate decât partidului k, ceea ce poate fi doar în cazurile că $V_i < V_k$ (partidul i este mai mic – are mai puține voturi, decât cel k), atunci regula (8) se transformă în

But if $u_i = u_k - g$, $g > 0$, ie to party i it have been already distributed less seats than to the k one, which can only be in cases that $V_i < V_k$ (party i is smaller – has less votes, than the k one), then the rule (8) turns into

$$i \succ k, \text{ dacă } \Delta U_i > \Delta U_k + g\frac{Q - c\Delta U_k}{cu_k + 1}. \tag{10}$$

Regulile (9) şi (10) sunt o altă formă de regulă VD pentru metoda DLG. Ele se deosebesc, de cea (7) pentru metoda Hamilton, prin factorul $g(Q - c\Delta U_k)/(cu_k + 1)$. Acesta, pe lângă parametrii Q şi c, care se referă la întreg scrutinul, conține doar parametri ce caracterizează partidul k (u_k şi ΔU_k); unicul parametru, ce leagă partidele i şi k, este g, dar el ține doar de relațiile „mai mare” sau „mai mic” şi poate fi referit la toate partidele „mai mari” sau „mai mici” față de partidul k.

4. Predispunerea unui partid aparte la favorizarea de partide

Regulile (9) şi (10) definesc, practic, predispunerea partidului k la favorizarea de partide.

Afirmația 1. La aplicarea metodei DLG, comparativ cu metoda Hamilton:

1) dacă $0 < \Delta U_k < Q/c$, atunci partidul k este predispus la favorizarea partidelor mai

Rules (9) and (10) are another form of VD rule for DLG method. They differ, from the (7) one for Hamilton method, by factor $g(Q - c\Delta U_k)/(cu_k + 1)$. This, in addition to parameters Q and c, which refers to the entire ballot, contains only parameters characterizing the party k (u_k and ΔU_k); the only parameter, which links parties i and k, is g, but it keeps only to relations “larger” or “smaller” and may be referred to all parties “larger” or “smaller” than the k one.

4. Predisposition of a party apart to favoring parties

Rules (9) and (10) define, practically, predisposition of party k to favoring parties.

Statement 1. Comparatively to Hamilton method, when applying DLG method:

1) if $0 < \Delta U_k < Q/c$, then the party k is predisposed to favoring larger parties, on

mari, în baza trecerii de la acesta a unei părţi a puterii de influenţă;

2) dacă $\Delta U_k > Q/c$, atunci partidul k este predispus la favorizarea partidelor mai mici, în baza trecerii de la acesta a unei părţi a puterii de influenţă;

3) dacă $\Delta U_k = Q/c$, atunci partidul k nu este predispus la favorizarea nici a partidelor mai mari şi nici a celor mai mici.

Într-adevăr, fie $\Delta U_k < Q/c$. Atunci, dacă $u_i = u_k + g$, $g > 0$, adică $V_i > V_k$, regula (9) favorizează partidul i (mai mare), deoarece de la ΔU_k (partidul mai mic) se scade mărimea pozitivă $Z = g(Q - c\Delta U_k)/(cu_k + 1)$. Dacă, însă, $u_i = u_k - g$, $g > 0$, adică $V_i < V_k$, atunci regula (9) defavorizează partidul i (mai mic), adică favorizează partidul k (mai mare), întrucât la ΔU_k (partidul mai mare) se adaugă mărimea pozitivă Z. Totodată, conform (4), dacă partidul k este defavorizat, atunci are loc $x_k \le a_k$ la $V_k > a_kQ$, adică $\Delta U_k > 0$.▼

Fie $\Delta U_k > Q/c$. Atunci, dacă $u_i = u_k + g$, $g > 0$, adică $V_i > V_k$, regula (9) defavorizează partidul i (mai mare), adică favorizează partidul k (mai mic), deoarece de la ΔU_k se scade mărimea negativă Z, deci la ΔU_k (partidul mai mic) se adaugă mărimea pozitivă $|Z|$. Dacă însă $u_i = u_k - g$, $g > 0$, adică $V_i < V_k$, atunci regula (10) favorizează partidul i (mai mic), fiindcă la ΔU_k se adaugă mărimea negativă Z, adică, de la ΔU_k (partidul mai mare) se scade mărimea pozitivă $|Z|$. ▼

Fie $\Delta U_k = Q/c$. Atunci regulile (9) şi (10) coincid, transformându-se în cea (7), şi, deoarece metoda Hamilton este neutră, partidul k nu este predispus la favorizarea nici a partidelor mai mari şi nici a celor mai mici. ■

În formă grafică, predispunerea unui partid, fie k, la favorizarea de partide comparativ cu metoda Hamilton, în baza trecerii de la acesta a unei părţi a puterii de influenţă, este prezentată în Figura 1.

Consecinţa 1. La aplicarea metodei DLG, predispunerea de favorizare a partidelor mai mici este crescătoare, iar cea de favorizare a partidelor mai mari este descrescătoare faţă de creşterea c.

Într-adevăr, din prima stipulare a Afirmaţiei 1, se poate observa că, la aceeaşi valoare a mărimii ΔU_k, raportul Q/c scade odată cu creşterea c, deci scad şi şansele ca să aibă loc inegalitatea $\Delta U_k < Q/c$, adică scade şi predispunerea la favorizarea partidelor mai mari decât cel k. Din contra, din a doua stipulare a Afirmaţiei 1, se poate observa că, la aceeaşi valoare a mărimii ΔU_k, deşi raportul Q/c tot scade odată cu creşterea c, şansele ca să aibă loc inegalitatea

the basis of transition from it of a part of the influence power;

2) if $\Delta U_k > Q/c$, then the party k is predisposed to favoring smaller parties, based on the basis of transition from it of a part of the influence power;

3) if $\Delta U_k = Q/c$, then the party k is not predisposed to favoring any party, neither larger parties nor the smaller.

Indeed, let $\Delta U_k < Q/c$. Then, if $u_i = u_k + g$, $g > 0$, ie $V_i > V_k$, the rule (9) favors party i (larger), because from ΔU_k (the smaller party) is subtracted the positive value $Z = g(Q - c\Delta U_k)/(cu_k + 1)$. But if $u_i = u_k - g$, $g > 0$, ie $V_i < V_k$, then rule (9) disfavor the party i (smaller), ie favors the party k (larger), because to ΔU_k (the larger party) is added the positive value Z. However, according to (4), if party k is disfavored, then takes place $x_k \le a_k$ at $V_k > a_kQ$, ie $\Delta U_k > 0$.▼

Let $\Delta U_k > Q/c$. Then if $u_i = u_k + g$, $g > 0$, ie $V_i > V_k$, the rule (9) disfavors party i (larger), ie favors the party k (smaller), because from ΔU_k is subtracted the negative value Z, so to ΔU_k (the smaller party) is added the positive value $|Z|$. But if $u_i = u_k - g$, $g > 0$, ie $V_i < V_k$, then rule (10) favors the party i (smaller), because to ΔU_k is added the negative value Z, so from ΔU_k (the larger party) is subtracted the positive value $|Z|$.▼

Let $\Delta U_k = Q/c$. Then rules (9) and (10) coincide, turning into the (7), and, because Hamilton method is neutral, the party k is not predisposed to favor neither larger parties nor the smaller ones.■

In graphical form, the predisposition of a party, let be k, to favor parties comparatively to Hamilton method, basing on the transition from it of a part of the influence power, is shown in Figure 1.

Consequence 1. When applying DLG method, the predisposition of favoring smaller parties is increasing, and of favoring larger parties is decreasing to the increase of c.

Indeed, from the first stipulation of Statement 1, one can see that, at the same size of ΔU_k, ratio Q/c decreases with the increase of c, thus are decreasing chances to occur the inequality $\Delta U_k < Q/c$, so decreases the predisposition to favor parties larger than the k one. On the contrary, from the second stipulation of Statement 1 one can see that, at the same size of ΔU_k, although the ratio Q/c also decreases with the increase of c, chances to occur the inequality $\Delta U_k > Q/c$ are increasing, ie increases the predispo-

$\Delta U_k > Q/c$ cresc, adică creşte şi predispunerea la favorizarea partidelor mai mici. Se vede această tendinţă şi din Figura 1. ■

sition of favoring smaller parties. This trend is seen also in Fig. 1. ■

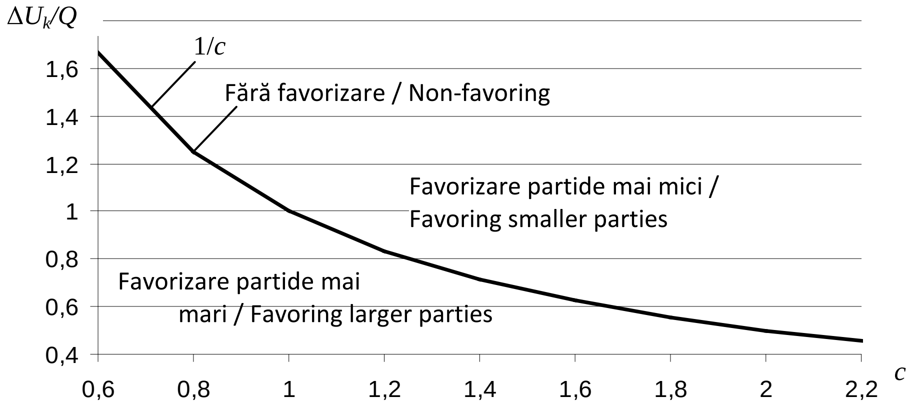

Figura 1. Diagrama favorizării de partide de către partidul *k* /
Figure 1. Diagram of favoring parties by party *k*.

Afirmaţia 2. La aplicarea metodei DLG, pot fi favorizate atât partidele mari, cât şi cele mici.

Într-adevăr, conform Consecinţei 5.1 din [4], la aplicarea metodei DLG pot atinge Cota de sus de mandate ($x_i \geq a_i + 1$), atât partidele mari, cât şi cele mici, întrunindu-se condiţiile (3). ■

5. Condiţia de echilibru Hamilton bipartit DLG

Prezintă interes condiţia de echilibru Hamilton bipartit, în sensul Definiţiei 4.10 din [2]: se consideră condiţie de echilibru Hamilton bipartit condiţia privind două partide din cele *n*, care asigură aceeaşi relaţie de preferinţă între cele două partide ca şi la aplicarea metodei Hamilton.

Afirmaţia 3. Pentru metoda DLG, condiţia de echilibru Hamilton bipartit între partidele *i* şi *k* constă în folosirea, în regula VD (6), a mărimii *c* determinate ca

Statement 2. When applying DLG method, may be favored both large parties and small ones.

Indeed, according to Consequence 5.1 from [4], when applying DLG method, both large parties and small ones can reach the Higher Quota ($x_i \geq a_i + 1$), meeting the conditions (3). ■

5. DLG condition of bipartite Hamilton equilibrium

It is of interest the condition of bipartite Hamilton equilibrium, in sense of Definition 4.10 from [2]: of bipartite Hamilton equilibrium is considered the condition regarding two parties of the *n* ones, which provide the same relationship of preferance between the two parties as the one that takes place when applying the Hamilton method.

Statement 3. For the DLG method, the condition of bipartite Hamilton equilibrium between parties *i* and *k* consist on the use, in VD rule (6), of value *c* determined as

$$i \succ k, \text{ dacă } c = c_{ik} = \begin{cases} \dfrac{Q}{\Delta U_{ik}}, \text{ la } \Delta U_{ik} > 0 \\ > 0, \text{ la } \Delta U_{ik} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

unde $\Delta U_{ik} = (\Delta U_i + \Delta U_k)/2$, $\Delta U_i \geq 0$, $\Delta U_k \geq 0$.

Într-adevăr, un caz particular al condiţiei de echilibru Hamilton bipartit DLG între partidele *i* şi *k*, poate fi formulat astfel: dacă

where $\Delta U_{ik} = (\Delta U_i + \Delta U_k)/2$, $\Delta U_i \geq 0$, $\Delta U_k \geq 0$.

Indeed, a particular case of DLG condition for bipartite Hamilton equilibrium between parties *i* and *k*, can be formulated as follows: if

$$\Delta U_i = \Delta U_k = \Delta U_{ik}, \tag{12}$$

atunci, trebuie să aibă loc şi

then must take place the equality

$$\frac{V_i}{cu_i + 1} = \frac{V_k}{cu_k + 1}. \tag{13}$$

Să determinăm valoarea *c*, care corespunde relaţiilor (12) şi (13). Din (13), ţinând cont că

Let determine the value of *c*, which corresponds to relations (12) and (13). From (13), given

$V_i = Qu_i + \Delta U_i$ şi $V_k = Qu_k + \Delta U_k$, avem $(Qu_i + \Delta U_i)/(cu_i + 1) = (Qu_k + \Delta U_k)/(cu_k + 1)$, de unde, în urma unor transformări simple, obţinem

$$c = c_{ik} = Q/\Delta U_{ik} \text{ la } \Delta U_{ik} \neq 0. \quad (14)$$

Astfel, dacă au loc relaţiile (12) şi (14), atunci are loc şi relaţia (13). ▼

Acum, fie $\Delta U_k > 0$, $\Delta U_i = \Delta U_k + \delta$, $\delta > 0$, $\Delta U_{ik} = (\Delta U_i + \Delta U_k)/2 = \Delta U_i - \delta/2$ şi are loc (14). Conform regulii VD generalizate (7), are loc $i \succ k$, deoarece $\Delta U_i > \Delta U_k$. Să demonstrăm că are loc şi regula VD a metodei DLG (6). Înlocuind expresia pentru ΔU_{ik} în (14) şi cea obţinută a lui c în (6), în rezultatul unor transformări simple, relaţia (6) se poate aduce la forma $Qu_i + \Delta U_i + Qu_k + \Delta U_k > 0$, adică $V_i + V_k > 0$, care are loc, deci are loc şi relaţia (6). ▼

Totodată, la $\Delta U_{ik} = 0$, are loc $\Delta U_i = \Delta U_k = 0$, adică preferinţele Hamilton ale partidelor i şi k sunt egale şi acestea pot fi ordonate între ele arbitrar, inclusiv conform preferinţelor metodei DLVBP (25) şi anume $i \succ k$, dacă $Qa_i/(c_{ik}a_i + 1) > Qa_k/(c_{ik}a_k + 1)$ – aici c_{ik} poate avea orice valoare nenegativă, adică $i \succ k$, dacă $V_i > V_k$. Deci, şi la $\Delta U_{ik} = 0$ există ordonarea Hamilton a partidelor i şi k, care coincide cu cea DLVBP. Astfel, valoarea scontată a mărimii c se determină conform (14). Îmbinând cazurile $\Delta U_{ik} > 0$ şi $\Delta U_{ik} = 0$, obţinem condiţia (11). ■

Conform (11), valoarea c este descrescătoare faţă de $\Delta U_i > 0$ şi $\Delta U_k > 0$.

6. Cazuri aparte de echilibru Hamilton

Există categorii de scrutine, pentru care, la anumite valori ale c, metoda DLG oferă distribuirea de mandate Hamilton.

Afirmaţia 4. În condiţiile problemei (1)-(2), dacă pentru un scrutin au loc relaţiile

$$\Delta V_i = 0,\ i = \overline{1,n}, \quad (15)$$

atunci au loc şi relaţiile

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n = M, \quad (16)$$

şi viceversa.

Într-adevăr, conform definiţiei, au loc $V_i = Qa_i + \Delta V_i = Qa_i$, $i = \overline{1,n}$. Deci, ţinând cont că mărimile a_i, $i = \overline{1,n}$ sunt numere întregi, avem $a_i = V_i/Q = \lfloor V_i/Q \rfloor$, $i = \overline{1,n}$. Astfel, dacă au loc egalităţile (15), atunci are loc şi cea (16).

Fie are loc (16). Să demonstrăm că are loc şi (15). Avem $a_i = (V_i - \Delta V_i)/Q$, $i = \overline{1,n}$ sau, înlocuind în (16), $\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \Delta V_i) = M$, de unde $V - \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = MQ$, adică, ţinând cont că $V = MQ$,

that $V_i = Qu_i + \Delta U_i$ and $V_k = Qu_k + \Delta U_k$, one have $(Qu_i + \Delta U_i)/(cu_i + 1) = (Qu_k + \Delta U_k)/(cu_k + 1)$, from where, as a result of simple transformations, we get

Thus, if occur relations (12) and (14), then takes place the (13) one, too.▼

Now, let $\Delta U_k > 0$, $\Delta U_i = \Delta U_k + \delta$, $\delta > 0$, $\Delta U_{ik} = (\Delta U_i + \Delta U_k)/2 = \Delta U_i - \delta/2$ and takes place (14). According to the generalized VD rule (7), occurs $i \succ k$, because $\Delta U_i > \Delta U_k$. We have to prove that occurs the VD rule (6) of DLG method, too. Substituting the expression for ΔU_{ik} in (14) and the one obtained for c in (6), after some simple transformations, the rule (6) can be turned to the form $Qu_i + \Delta U_i + Qu_k + \Delta U_k > 0$, ie $V_i + V_k > 0$, which occurs, so takes place relationship (6), too. ▼

At the same time, at $\Delta U_{ik} = 0$, takes place $\Delta U_i = \Delta U_k = 0$, that is Hamilton preferences of parties i and k are equal and they can be arranged between them arbitrarily, inclusive according to preferences of Bipartite Variable Linear Divisor (BPVLD) method (25), namely $i \succ k$, if $Qa_i/(c_{ik}a_i + 1) > Qa_k/(c_{ik}a_k + 1)$ – here c_{ik} can be any non-negative, ie $i \succ k$, if $V_i > V_k$. So, at $\Delta U_{ik} = 0$ exists the Hamilton ordering of parties i and k, coinciding with the BPVLD one. Thus, the expected size of c is determined conform (14). Combining cases $\Delta U_{ik} > 0$ and $\Delta U_{ik} = 0$, we get the condition (11). ■

According to (11), the value of c is decreasing with refer to $\Delta U_i > 0$ and $\Delta U_k > 0$.

6. Cases apart of Hamilton equilibrium

There are categories of polls, for which, at certain values of c, DLG method provides the Hamilton distribution of seats.

Statement 4. Given the problem (1)-(2), if for an election take place relations

then occur relations

too, and vice verso.

Indeed, by definition occur $V_i = Qa_i + \Delta V_i = Qa_i$, $i = \overline{1,n}$. So, given that sizes a_i, $i = \overline{1,n}$ are integers, we have $a_i = V_i/Q = \lfloor V_i/Q \rfloor$, $i = \overline{1,n}$. Thus, if equalities (15) take place, then the (16) occurs, too.

Let takes place (16). We must show that also occurs (15). We have $a_i = (V_i - \Delta V_i)/Q$, $i = \overline{1,n}$, or substituting in (16), $\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \Delta V_i) = M$, from where $V - \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = MQ$, that is, given that $V = MQ$, one has $\sum \Delta V_i = 0$. At the same time, by obținem $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = 0.$ Totodată, prin definiție, au loc relațiile $V_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$, deci, în condițiile (16) au loc $\Delta V_i = 0,\ i = \overline{1,n}$. ■

Afirmația 5. Condiții de echilibru Hamilton, deci şi de neutralitate privind favorizarea de partide, pentru metoda DLG, sunt relațiile fiecăruia din cazurile:

definition, occur relations $V_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$, so in conditions (16) take place $\Delta V_i = 0,\ i = \overline{1,n}$. ■

Statement 5. Conditions of Hamilton equilibrium, and thus of neutrality with refer to favoring parties, for DLG method, are relations of each of the cases:

1) relațiile (15)/(16) la $c \geq 1$; (17)

2) $\Delta V_i = Q/c,\ i = \overline{1,n}$ la $c > 1$; (18)

3) $n = 2,\ c = 2$. (19)

Într-adevăr, în cazul condițiilor (17), conform Afirmației 6.1 din [2], metoda DLG respectă regula Cotei, adică $a_i \leq x_i \leq a_i + 1$. De aceea, ținând cont de (17), nici pentru un partid nu poate fi $x_i = a_i + 1$ (altfel ar trebui să fie partide, pentru care $x_i < a_i$). Deci, $x_i = a_i,\ i = \overline{1,n}$, toate cele n partide fiind conform (5) neutre; deci şi metoda DLG este neutră pentru asemenea scrutine. Totodată, conform definiției au loc $V_i = Qa_i + \Delta V_i = Qa_i,\ i = \overline{1,n}$ şi metoda Hamilton oferă soluția $x_i(\text{H}) = a_i,\ i = \overline{1,n}$. Deci, $x_i(\text{DLG}) = x_i(\text{H}),\ i = \overline{1,n}$.▼

În cazul condițiilor (18), conform cazului 3 al Afirmației 1, un partid i nu este predispus la favorizarea vreunui alt partid din cele n, dacă $\Delta U_i = Q/c$. Evident, dacă această condiție are loc pentru fiecare din cele n partide, adică, dacă $\Delta U_i = Q/c,\ i = \overline{1,n}$, atunci regulile DLG (9) şi (10) se vor reduce la cele Hamilton (7) pentru toate cele n partide. Deci, la ultima etapă de distribuire a mandatelor, vor avea loc egalitățile $x_i(\text{DLG}) = x_i(\text{H}),\ u_i = a_i,\ \Delta U_i = \Delta V_i,\ i = \overline{1,n}$. De asemenea, deoarece $\Delta V_i < Q$, egalitățile (9) şi (10) pot avea loc doar la $c > 1$. Totodată, metoda Hamilton este neutră. De aceea, în acest caz, este neutră şi metoda DLG. ▼

În ce priveşte cazul condițiilor (19), a se vedea Consecința 5. ■

Astfel, dacă la aplicarea metodei DLG au loc egalitățile (17) sau cele (18), sau condițiile (19), atunci, distribuirea DLG va coincide cu cea Hamilton, fiind optimală în sensul indicelui (1) şi respectând, totodată, regula Cotei.

Exemplul 1 de confirmare a cazului (18). Fie: $c = 3$; $M = 32$; $n = 6$; $V_1 = 3100$; $V_2 = 2500$; $V_3 = 1600$; $V_4 = 1300$; $V_5 = 700$; $V_6 = 400$. Atunci $Q = (3100 + 2500 + 1600 + 1300 + 700 + 400)/32 = 300$; $Q/c = 100$. Rezultatele celorlalte calcule sunt prezentate în Tabelul 1.

Indeed, in case of conditions (17), according to Statement 6.1 of [2], DLG method respects the Quota rule, ie $a_i \leq x_i \leq a_i + 1$. Therefore, taking into account (17), nor to a party can be $x_i = a_i + 1$ (otherwise, it would be parties for which $x_i < a_i$). So, $x_i = a_i,\ i = \overline{1,n}$, all the n parties being, conform to (5), neutral; therefore DLG method is neutral for such elections, too. However, by definition occur $V_i = Qa_i + \Delta V_i = Qa_i,\ i = \overline{1,n}$, and Hamilton method provides the solution $x_i(\text{H}) = a_i,\ i = \overline{1,n}$. So, $x_i(\text{DLG}) = x_i(\text{H}),\ i = \overline{1,n}$.▼

In case of conditions (18), according to stipulation 3 of Statement 1, a party i is not predisposed to favoring a different party from the n, if $\Delta U_i = Q/c$. Obviously, if this condition occurs for each of the n parties, ie if $\Delta U_i = Q/c, i = \overline{1,n}$, then the DLG rules (9) and (10) will be reduced to the Hamilton one (7) for all the n parties. So, at last stage of distribution of seats, will take place equalities $x_i(\text{DLG}) = x_i(\text{H}),\ u_i = a_i,\ \Delta U_i = \Delta V_i,\ i = \overline{1,n}$. Also, because of $\Delta V_i < Q$, equalities (9) and (10) can only occur at $c > 1$. However, the Hamilton method is neutral. Therefore, in this case the DLG method is neutral, too. ▼

With refer to conditions (19), see Consequence 5. ■

Thus, if when applying the DLG method take place equalities (17) or the (18) ones, or conditions (19), then the DLG distribution will coincide with the Hamilton one, being optimal in sense of index (1) and satisfying, at the same time, the Quota rule.

Example 1 of confirmation of case (18). Let: $c = 3$; $M = 32$; $n = 6$; $V_1 = 3100$; $V_2 = 2500$; $V_3 = 1600$; $V_4 = 1300$; $V_5 = 700$; $V_6 = 400$. Then $Q = (3100 + 2500 + 1600 + 1300 + 700 + +400)/32 = 300$; $Q/c = 100$. The results of other calculations are shown in Table 1.

Tabelul 1 / Table 1

Rezultatele calculelor la exemplul 1 / Results of calculations to example 1

Parametrul / Parameter	Partidele / Parties					
	1	2	3	4	5	6
V_i	3100	2500	1600	1300	700	400
a_i	10	8	5	4	2	1
ΔV_i	100	100	100	100	100	100
x_i(H)	11	9	5	4	2	1
x_i(DLG)	11	9	5	4	2	1

Deoarece, pentru exemplul 1, x_i(DLG) $\geq a_i$ şi $\Delta V_i = V_i/(ca_i+1) = 100$, $i=\overline{1,6}$, cele $\Delta M = 2$ mandate, rămase nedistribuite după alocarea fiecărui partid a câte $a_i = \lfloor V_i\ /Q \rfloor$ mandate, conform ambelor metode (Hamilton şi DLG), sunt alocate câte unul la fiecare din cele ΔM partide cu valoarea V_i mai mare.

Afirmația 6. Disproporționalitatea minimă a distribuirii mandatelor, în sensul indicelui (1), pentru condiția de echilibru Hamilton a metodei DLG (17) se asigură la orice $c \geq 1$ şi este egală cu 0, iar pentru cea (18) – la $c = n$ şi este egală cu $2(1 - 1/n)$.

Într-adevăr, dacă are loc condiția (17), atunci, conform (1), $I_d = 0$ indiferent de valoarea $c \geq 1$. ▼

În ce priveşte condiția (18), conform Afirmației 5, aceasta este de echilibru Hamilton, deci au loc inegalitățile $a_i \leq x_i \leq a_i + 1$, $i=\overline{1,n}$. Totodată, luând în considerație faptul că puterea de influență sumară în exces a partidelor favorizate este egală cu puterea de influență sumară în pierdere a partidelor defavorizate, avem $(n - z)Q/c = z(Q - Q/c)$ sau $(n - z)/c = z(1 - 1/c)$, adică $z = n/c$; aici z este numărul total de partide favorizate. Evident, are loc

Because, for example 1, x_i(DLG) $\geq a_i$ and $\Delta V_i = V_i/(ca_i+1) = 100$, $i=\overline{1,6}$, the $\Delta M = 2$ seats, remaining undistributed after allocation to each party by $a_i = \lfloor V_i\ /Q \rfloor$ seats, according to both methods (Hamilton and DLG), are assigned by one to each of the ΔM parties with larger value of V_i.

Statement 6. Minimal disproportion of seats distribution, in sense of index (1), for the GLD method condition of Hamilton equilibrium (17) is provided at any c ≥ 1 and is equal to 0, and for the (18) one – at $c = n$ and is equal to $2(1 - 1/n)$.

Indeed, if takes place the condition (17), then according to (1), $I_d = 0$ regardless of the value of $c \geq 1$. ▼

Regarding the condition (18), according to Statement 5 this is of Hamilton equilibrium, then take place inequalities $a_i \leq x_i \leq a_i + 1$, $i=\overline{1,n}$. However, considering that the summary influence power in excess of favored parties equals the summary influence power in loss of disfavored parties, we have $(n - z)Q/c = z(Q - Q/c)$ or $(n - z)/c = z(1 - 1/c)$, ie $z = n/c$; here z is the total number of favored parties. Obviously, occurs

$$I_d = 2d(n - z)Q/c = 2n(1 - 1/c)/c. \qquad (20)$$

Din (20) se poate observa că, la $c > 1$, funcția $I_d(c)$ este descrescătoare. Totodată, valoarea mărimii c este mărginită de sus de condiția $z = n/c$, în care, la $\Delta M > 0$, $1 \leq z \leq n/2$. Astfel, valoarea maximă a mărimii c, în aceste condiții, este egală cu n şi, înlocuind în (20), obținem $I_d = 2(1 - 1/n)$.■

Afirmația 7. Disproporționalitatea maximă a distribuirii mandatelor, în sensul indicelui (1), pentru condiția de echilibru Hamilton a metodei DLG (18), se asigură la $c = 2$ şi este egală cu $n/2$.

Într-adevăr, urmând raționamentele folosite la demonstrarea Afirmației 6, funcția $I_d(c)$, determinată de expresia (20), este descrescătoare.

From (20) we can see that, at $c > 1$, the function $I_d(c)$ is a decreasing one. At the same time, the value of quantity c is bounded from above by the condition $z = n/c$, in which, at $\Delta M > 0$, takes place $1 \leq z \leq n/2$. Thus, the maximum value of constant c, in these circumstances, is equal to n and, substituting in (20), we get $I_d = 2(1 - 1/n)$. ■

Statement 7. The maximum disproportionality of seats distribution, in sense of index (1), for the GLD method condition of Hamilton equilibrium (18) is provided at c = 2 and is equal to $n/2$.

Indeed, following the reasoning used to prove Statement 6, the function $I_d(c)$, determined by expression (20), is a decreasing one. At the

Totodată, valoarea mărimii c este mărginită de jos de condiția $z = n/c$, în care, la $\Delta M > 0$, $1 \le z \le n/2$. Astfel, valoarea minimă a mărimii c în aceste condiții, ținând cont că $n \ge 2$, este egală cu 2 şi, înlocuind în (20), obținem $I_d = n/2$. ■

Acest rezultat poate fi obținut şi prin derivarea expresiei (20) față de c şi egalarea cu 0 a rezultatului obținut: $2nQc^{-2}(2/c - 1) = 0$, de unde $c = 2$. Derivata de gradul doi a expresiei (20) față de c este $4nQc^{-4}(c - 3)$. Aceasta, la $c = 2$, este negativă, deci este vorba de valoarea maximă a indicelui I_d.

7. Metoda Hamilton prin eliminare

În cele ce urmează, se va folosi *metoda Hamilton prin eliminare* (*Celor mai mari complemente cu cota Hare*), conform căreia, inițial, fiecărui partid i se alocă Cota de sus de mandate, iar apoi de la fiecare din primele $\Delta X = n - \Delta M$ partide cu valoarea mai mare a complementului ΔR_i se sustrage câte un mandat. Algoritmul A_1 de operare a acesteia este următorul:

1. $x_i := a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$. Se determină numărul mandatelor distribuite în exces $\Delta X := a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n - M = n - \Delta M$.
2. $\Delta R_i := (a_i + 1)Q - V_i = Q - \Delta V_i$, $i = \overline{1,n}$. Câte 1 mandat, din cele ΔX, se sustrage de la fiecare din primele ΔX partide cu valoarea mai mare a complementului ΔR_i. Distribuirea s-a încheiat.

Se poate uşor observa că metoda Hamilton prin eliminare (de la Cota de sus de mandate) diferă de metoda Hamilton (prin adaos la Cota de jos de mandate) doar prin modalitatea de obținere a soluției, esența fiind aceeaşi şi asigurând aceleaşi soluții, ca şi cea Hamilton. De exemplu, cu acelaşi succes, la pasul 2 al algoritmului A_1, cele ΔX mandate pot fi sustrase de la primele ΔX partide cu valoarea mai mică a mărimilor ΔV_i, rămânând cu câte $a_i + 1$ mandate ΔM partide cu valoarea mai mare a resturilor ΔV_i, ca şi la metoda Hamilton.

8. Metoda DLG prin eliminare

Metoda DLG directă (prin adaos) prevede pornirea de la 0 mandate pentru fiecare din cele n partide şi adăugarea treptată ulterioară de mandate partidelor, mandat cu mandat, în conformitate cu valorile funcțiilor lor de preferință. *Metoda DLG prin eliminare*, din contra, prevede pornirea de la un număr maxim posibil de mandate pentru fiecare partid şi sustragerea treptată ulterioară de mandate de la partide, mandat cu mandat, în conformitate cu

same time, the value of constant c is bounded from below by condition $z = n/c$, in which, at $\Delta M > 0$, takes place $1 \le z \le n/2$. Thus, the minimum value of constant c in these conditions, given that $n \ge 2$, is equal to 2 and, substituting in (20), we obtain $I_d = n/2$. ■

This result can be achieved also by the derivation of expression (20) by c and equalizer to 0 of obtained result $2nQc^{-2}(2/c - 1) = 0$, from where we get $c = 2$. Second degree derivative of expression (20) to c is $4nQc^{-4}(c - 3)$. This, at $c = 2$, is negative, so we have the maximum value of index I_d.

6. Hamilton method by elimination

In the following we will use the *Hamilton method by elimination* (*Of largest complements with the Hare quota*), according to which initially to each party is allocated the Higher Quota of seats, and then from each of the first $\Delta X = n - \Delta M$ parties with the highest complement ΔR_i is removed one seat. Algorithm A_1 of its operation is as follows:

1. $x_i := a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$. Determine the number of seats distributed in excess $\Delta X := a_1 + a_2 + \ldots \ldots + a_n + n - M = n - \Delta M$.
2. $\Delta R_i := (a_i + 1)Q - V_i = Q - \Delta V_i$, $i = \overline{1,n}$. By one seat, from the ΔX, is removed from each of the first ΔX parties with the largest value of complement ΔR_i. Distribution ended.

One could notice that Hamilton method by elimination (from Higher Quota of seats) differs from the Hamilton one (by adding to Lower Quota of seats) only by the way of obtaining the solution, the essence being the same and ensuring the same solutions as the Hamilton one. For example, with the same success, at step 2 of algorithm A_1, the ΔX seats can be removed by one from the first ΔX parties with the lowest values of remainders ΔV_i, remaining with $a_i + 1$ seats ΔM parties with the highest values of remainders ΔV_i, as well as Hamilton method does.

8. GLD method by elimination

Direct DLG method (by adding) provides starting from 0 seats for each of the n parties and after gradually adding seats to parties subsequently, seat by seat, in accordance with values of their preference functions. *GLD method by elimination*, by contrary, provides starting from the maximum possible number of seats for each party and after gradually removing seats from parties concerned subsequently, seat by seat, in accordance with the value of their preference valorile funcţiilor lor de preferinţă. Ca număr maxim posibil Y_i de mandate pentru un partid poate fi folosit M sau un alt număr ce nu depăşeşte M. Bineînţeles, cu cât se reuşesc valori mai mici pentru Y_i, cu atât vor fi necesare mai puţine calcule cu distribuirea mandatelor.

Cel mai simplu caz este folosirea aceleiaşi valori u_0 pentru toate cele n partide, adică $u_{0i} = u_0$, $i = \overline{1,n}$. În cele ce urmează, va fi necesară regula VD mai generală, similară celei mai generale pentru metoda Sainte-Lague din [3], şi anume

functions. As maximum possible number Y_i of seats for party i can be used M or an another number not exceeding M. Of course, the lower the value for Y_i, the fewer will be the required calculations with distribution of seats.

The simplest case is to use the same value u_0 for all the n parties, ie $u_{0i} = u_0$, $i = \overline{1,n}$. In the following will be necessary the more general VD rule, similar to the more general one for Sainte-Lague method of [3], namely

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{V_i}{c(u_i + \Delta y_i - 1) + 1} > \frac{V_k}{cu_k + 1}, \qquad (21)$$

unde $\Delta y_i \geq 1$ este numărul de mandate care este de preferat încă de alocat, la cele u_i deja alocate, partidului i, faţă de alocarea a încă unui mandat, la cele u_k deja alocate partidului k. Ţinând cont că, în conformitate cu Consecinţa 4.2 din [4], la $c \geq 1$ regula Cotei de jos nu poate fi încălcată pentru cel mai mic partid, valoarea x_i poate fi obţinută în baza relaţiei (21), la $F(a_i) = \max\{F(a_j),\ j = \overline{1,n}\}$ şi $F(a_k) = \min\{F_j,\ j = \overline{1,n}\}$, unde $F(a_j) = V_j/(ca_j + 1)$. Din (21) la $u_j = a_j$, $j = \overline{1,n}$, în urma unor transformări simple, obţinem $\Delta x_i < (a_k + 1/c)V_i / V_k - a_i - 1/c + 1$. Astfel, ţinând cont că Δx_i este număr întreg, avem

where $\Delta y_i \geq 1$ is the number of seats preferable to be still allocated, to those u_i already allocated to party i, comparatively to the additional allocation of a seat, to those u_k already allocated to party k. Given that, according to Consequence 4.2 of [4], at $c \geq 1$ the Lower Quota rule can not be violated for the smallest party, the value of x_i can be obtained using (21), at $F(a_i) = \max\{F(a_j),\ j = \overline{1,n}\}$ and $F(a_k) = \min\{F_j,\ j = \overline{1,n}\}$, where $F(a_j) = V_j/(ca_j + 1)$. From (21) at $u_j = a_j$, $j = \overline{1,n}$, after simple transformations, we get $\Delta x_i < (a_k + 1/c)V_i / V_k - a_i - 1/c + 1$. Thus, given that Δx_i is an integer, we have

$$u_0 = a_i + \Delta x_i = a_i + \lfloor (a_k + 1/c)V_i / V_k - a_i - 1/c + 1 \rfloor. \qquad (22)$$

Valorile maxim posibile u_{0i} ale mărimilor $x_i, i = \overline{1,n}$ pot fi determinate în mod similar. Astfel, algoritmul de operare a metodei DLG prin eliminare este următorul:

1. Se determină partidul k, a cărui funcţie de preferinţă $F(a_k)$ are cea mai mică valoare, adică $F(a_k) = \min\{F(a_i),\ i = \overline{1,n}\}$. Apoi $u_{0i} := a_i + \lfloor (a_k + 1/c)V_i / V_k - a_i - 1/c + 1 \rfloor$, $i = \overline{1,n}$.
2. $u_i := u_{0i}$, $i = \overline{1,n}$. Cele $\Delta X = u_{01} + u_{02} + \ldots + u_{0n} - M$ mandate, distribuite în exces partidelor, se sustrag ulterior, câte unul, conform regulii (6) inversate – corespondentele celor mai mici ΔX rapoarte $V_i/[c(u_i - 1) + 1]$, adică

The maximum possible values u_{0i} of sizes $x_i, i = \overline{1,n}$ can be determined similarly. Thus, the algorithm of operation of GLD method by elimination is as follows:

1. Determine the party k, the preferably function $F(a_k)$ of which has the lowest value, that is $F(a_k) = \min\{F(a_i),\ i = \overline{1,n}\}$. After $u_{0i} := a_i + \lfloor (a_k + 1/c)V_i / V_k - a_i - 1/c + 1 \rfloor$, $i = \overline{1,n}$.
2. $u_i := u_{0i}$, $i = \overline{1,n}$. The $\Delta X = u_{01} + u_{02} + \ldots + u_{0n} - M$ seats, distributed in excess to parties, are later removed, one by one, according to rule (6) reversed – correspondences of the smallest ΔX ratious $V_i/[c(u_i - 1) + 1]$, ie

$$i \succ k, \text{ if } \frac{V_i}{c(u_i - 1) + 1} > \frac{V_k}{c(u_i - 1) + 1}, \qquad (23)$$

unde u_i este numărul curent de mandate distribuite partidului i.

1. $x_i := u_i$, $i = \overline{1,n}$. Distribuirea s-a încheiat.

Se poate uşor observa că metoda DLG, prin eliminare, diferă de metoda DLG ordinară

where u_i is the current number of seats distributed to party i.

1. $x_i := u_i$, $i = \overline{1,n}$. Distribution ended.

One could notice that GLD method by elimination differs from the ordinary GLD one (by (prin adaos) doar prin modalitatea de obținere a soluției, esența fiind aceeaşi şi asigurând aceleaşi soluții, ca şi cea DLG ordinară.

9. Cazuri de cvasi-echilibru Hamilton

Deoarece distribuirile DLG nu vor coincide întotdeauna cu cele Hamilton, pentru metoda DLG nu există, în caz general, o condiție de echilibru Hamilton, condițiile (17)-(19) fiind doar cazuri particulare.

Afirmația 8. Condiția de cvasi-echilibru Hamilton pentru metoda DLG este definită de valoarea mărimii $c = c_{\mathrm{eH}}$ determinată ca

adding) only by the way of obtaining the solution, the essence being the same and ensuring the same solutions as the ordinary DLG.

9. Cases of Hamilton cvasi-equilibrium

Because GLD distributions will not always coincide with the Hamilton ones, for GLD method there is not, in general case, a condition of Hamilton equilibrium, conditions (17) - (19) being only particular cases.

Statement 8. GLD method condition of Hamilton cvasi-eguilibrium is defined by the value of constant $c = c_{\mathrm{eH}}$ determined as

$$c_{\mathrm{eH}} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{n}{\Delta M}, \qquad (24)$$

unde $\Delta V = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n)/n$, şi având domeniul de definiție $c_{\mathrm{eH}} \in [n/(n-1); n]$.

Într-adevăr, la $c \geq 1$ conform Consecinței 5.4 din [4], pot fi doar două cazuri distincte:

where $\Delta V = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n)/n$, and having the definition area $_{\mathrm{eH}} \in [n/(n-1); n]$.

Indeed, at $c \geq 1$ according to Consequence 5.4 of [4], can be only two distinct cases:

1) $x_i \geq a_i,\ i = \overline{1,n}$;

2) $x_i \leq a_i + 1,\ i = \overline{1,n}$.

Dacă $x_i \geq a_i,\ i = \overline{1,n}$, atunci, folosind metoda DLG directă, se pot, mai întâi, distribui fiecărui partid i câte a_i mandate, iar apoi cele ΔM mandate rămase se pot aloca conform regulii (6). La etapa alocării primului, fie j, din cele ΔM mandate, au loc egalitățile $u_i = a_i$, $\Delta U_i = \Delta V_i$, $i = \overline{1,n}$. Respectiv, înlocuind în (11), obținem condiția de echilibru Hamilton bipartită între partidele i şi k: $c_{ik} = 2Q/(\Delta V_i + \Delta V_k)$. Totodată, trebuie folosită una şi aceeaşi valoare a mărimii c pentru toate perechile de partide ce se compară. Probabil, cea mai reuşită este media aritmetică c_{med} între c_{ik}, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n} \setminus k$. Se poate uşor determina că are loc $c_{\mathrm{med}} = Q/\Delta V$. Considerând că are loc $c_{\mathrm{eH}} = c_{\mathrm{med}}$ şi ținând cont că $\Delta V = \Delta MQ/n$, obținem (24). De asemenea, dacă, la distribuirea următoarelor mandate, partidele care au atins Cota de sus nu s-ar mai lua în considerație (metoda Hamilton respectă regula Cotei), atunci condiția (24) ar fi în vigoare pentru toate cele ΔM partide.

Folosirea, însă, la alocarea celui de-al doilea mandat, a aceleiaşi abordări, ca şi la alocarea primului mandat, ar conduce la modificarea condițiilor respective – pentru partidul j, în loc de ΔV_j ar fi $\Delta U_j = \Delta V_j - Q < 0$ şi în loc de ΔV ar fi $\Delta U = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_j + \ldots + \Delta U_n)/n = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_j - Q + \ldots + \Delta V_n)/n = (\Delta V - Q)/n < \Delta V/n$. Deci, ar creşte valoarea c_{med}, iar şansele de a depăşi Cota de sus pentru unele partide, conform Consecinței 1, s-ar reduce.

If $x_i \geq a_i,\ i = \overline{1,n}$, then using thr ordinary GLD method one can, first, distribute to each party i by a_i seats, and after the remaining ΔM seats can be allocated according to rule (6). At the stage of allocation of first, let j, from the ΔM seats, held equalities $u_i = a_i$, $\Delta U_i = \Delta V_i$, $i = \overline{1,n}$. Respectively, replacing in (11), we obtain the condition of bipartite Hamilton equilibrium between parties i and k: $c_{ik} = 2Q/(\Delta V_i + \Delta V_k)$. It should also use one and the same value of constant c for all compared pairs of parties. Perhaps the most successful is the arithmetic mean c_{med} among c_{ik}, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n} \setminus k$. It can easily determine that occurs $c_{\mathrm{med}} = Q/\Delta V$. Considering that $c_{\mathrm{eH}} = c_{\mathrm{med}}$ occurs and given that $\Delta V = \Delta MQ/n$, we obtain (24). Also, if at distribution of following seats to would not consider parties that have reached the Higher Quota (Hamilton method satisfies the Quota rule), then the condition (24) would be in force for all the ΔM parties.

Using however, at the allocation of the second seat, the same approach as at the allocation of the first seat, would lead to changes in concerned conditions - for party j, instead of ΔV_j it would be $\Delta U_j = \Delta V_j - Q < 0$ and instead of ΔV it would be $\Delta U = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_j + \ldots + \Delta U_n)/n = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_j - Q + \ldots + \Delta V_n)/n = (\Delta V - Q)/n < \Delta V/n$. So, it would increase the value of c_{med} and the chances of Higher Quota overcoming for some parties, according to Consequence 1, would be reduced.

Dacă $x_i \leq a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$, atunci distribuirea mandatelor poate fi efectuată, folosind metoda DLG prin eliminare (s. 8), la valorile maxim posibile ale mărimilor x_i, $i = \overline{1,n}$, egale cu cotele de sus de mandate respective ($u_{0i} = a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$). Sustragerea primului, fie j, din cele ΔX mandate distribuite în exces, are loc în aceleaşi condiţii, ca şi la alocarea primului din cele ΔM mandate, rămase nedistribuite după alocarea iniţială a câte a_i mandate în cazul 1 ($x_i \geq a_i$, $i = \overline{1,n}$). Deci, are loc (24). De asemenea, dacă, la sustragerea următoarelor mandate, partidele care au atins Cota de jos nu s-ar mai lua în consideraţie (metoda Hamilton respectă regula Cotei), atunci condiţia (24) ar fi în vigoare pentru toate cele ΔX partide.

Folosirea, însă, la sustragerea celui de-al doilea mandat, a aceleiaşi abordări, ca şi la sustragerea primului mandat, ar conduce la modificarea condiţiilor respective – pentru partidul j, în loc de ΔV_j ar fi $\Delta U_j = \Delta V_j + Q$ şi în loc de ΔV ar fi $\Delta U = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_j + \ldots + \Delta U_n)/n = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_j + Q + \ldots + \Delta V_n)/n = (\Delta V + Q)/n > \Delta V/n$. Deci, ar scade valoarea c_{med}, iar şansele de a nu respecta Cota de jos pentru unele partide, conform Consecinţei 1, s-ar reduce.

Deci, în cazul $x_i \geq a_i$, $i = \overline{1,n}$, la alocarea celui de-al doilea şi a următoarelor din cele ΔM mandate folosind aceeaşi abordare ca şi alocarea primului mandat, valoarea c_{med} ar creşte treptat cu fiecare mandat curent alocat. Din contra, în cazul $x_i \leq a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$, la sustragerea celui de-al doilea şi a următoarelor din cele ΔX mandate folosind aceeaşi abordare ca şi sustragerea primului mandat, valoarea c_{med} s-ar reduce treptat cu fiecare mandat curent sustras. Totodată, au loc relaţiile $\Delta X = n - \Delta M$, $\Delta M \in [1; n-1]$ şi $\Delta X \in [1; n-1]$; sunt excluse cazurile triviale rare, în care $\Delta M = 0$ şi, respectiv, $\Delta X = n$, deoarece soluţia la $c \geq 1$, conform cazului (17) al Afirmaţiei 5, este proporţională: $x_i = a_i$, $i = \overline{1,n}$. Considerând repartiţia simetrică a valorilor mărimii ΔM, deci şi a celor ale mărimii ΔX, faţă de mijlocul intervalului $[1; n-1]$, valorile medii ale ΔM şi ΔX sunt egale cu $(1 + n - 1)/2 = n/2$.

În condiţiile aceloraşi medii şi intervale de definiţie ale valorilor mărimilor ΔM şi ΔX, se poate aştepta, îndeosebi la $c \geq 1$, că, în medie, pe o infinitate de scrutine, creşterea c_{med}, la

If $x_i \leq a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$, then the distribution of seats can be performed, using the GLD method by elimination (s. 8), at maximum possible values for quantities x_i, $i = \overline{1,n}$, equal to concerned higher quotas of seats ($u_{0i} = a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$). The remove of the first, let j, of the ΔX seats distributed in excess occurs in the same conditions, as the allocation of first of the ΔM seats, remained undistributed after the initial allocation by a_i seats in case 1 ($x_i \geq a_i$, $i = \overline{1,n}$). So, it occurs (24). Also, if at following removing of seats to would not consider parties that have reached the Lower Quota (Hamilton method satisfies the Quota rule), then the condition (24) would be in force for all ΔX parties.

Using however, at the removung of the second seat, the same approach as at the allocation of the first seat, would lead to changes in concerned conditions - for party j, instead of ΔV_j it would be $\Delta U_j = \Delta V_j + Q$ and instead of ΔV it would be $\Delta U = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_j + \ldots + \Delta U_n)/n = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_j + Q + \ldots + \Delta V_n)/n = (\Delta V + Q)/n > \Delta V/n$. So, it would reduce the value of c_{med} and the chances to not satisfy the Lower Quota for some parties, according to Consequence 1, would be reduced.

So, in case of $x_i \geq a_i$, $i = \overline{1,n}$, at the allocation of the second and of the following from the ΔM seats using the same approach as at the allocation of the first seat, the c_{med} value would increase gradually with each assigned current seat. On the contrary, in case of $x_i \leq a_i + 1$, $i = \overline{1,n}$, at the removing of the second and of the following from the ΔX seats using the same approach as at the removing of the first seat, c_{med} value would decrease gradually with each removed current seat. However, occur relationships $\Delta X = n - \Delta M$, $\Delta M \in [1; n-1]$ şi $\Delta X \in [1; n-1]$; were excluded trivial rare cases, for which $\Delta M = 0$ and, respectively, $\Delta X = n$, because the solution at $c \geq 1$, according to case (17) of Statement 5, is proportional: $x_i = a_i$, $i = \overline{1,n}$. Considering symmetrical the distribution of ΔM values, and therefore the ΔX size towards the middle of the interval [1; n - 1], the average values of ΔM and ΔX are equal to $(1 + n - 1)/2 = n/2$.

In conditions of the same means and definition intervals for ΔM and ΔX values, it can be expected, especially at $c \geq 1$, that on average, on infinity of elections, the increase of c_{med}, at the distribuirea următoarelor $\Delta M - 1$ mandate, se neutralizează de micşorarea c_{med} la sustragerea următoarelor $\Delta X - 1$ mandate. Atunci, în medie, valoarea c_{med} este egală cu $Q/\Delta V$ şi are loc (24).▼

În ce priveşte domeniul de definiție al valorilor mărimii c_{eH}, ținând cont că $\Delta M \in [1; n - 1]$ (cazul $\Delta M = 0$ asigură, la $c \geq 1$, distribuirea proporțională), obținem: limita de jos a domeniului de definiție în cauză $n/\max\Delta M = n/(n - 1)$ şi limita de sus $n/\min\Delta M = n/1 = n$. ▼

Evident, deoarece ΔV doar în medie ia în considerație valorile ΔV_i, $i = \overline{1, n}$ pe cele n partide, fără a ține cont de fiecare mărime ΔV_i, $i = \overline{1, n}$ în parte, condiția (24) este una de cvasi-echilibru, şi nu de echilibru Hamilton. Chiar dacă valoarea c şi se determină conform (24), aceasta nu garantează că distribuirea DLG în asemenea condiții va coincide cu cea Hamilton. Totodată, ea va asigura, totuşi, o deosebire relativ mică a distribuirii DLG de cea Hamilton. ■

Consecința 2. La aplicarea metodei DLG:

1) dacă $c < n/(n - 1)$, atunci, se pot favoriza, de regulă, partidele mai mari;
2) dacă $c > n$, atunci, se pot favoriza, de regulă, partidele mai mici;
3) dacă $n/(n - 1) \leq c \leq n$, atunci, se pot favoriza atât partidele mari, cât şi cele mici, inclusiv:
   3.1) la $n/(n - 1) \leq c < n/\Delta M$ se pot favoriza mai mult partidele mari, decât cele mici;
   3.2) la $n/\Delta M < c \leq n$ se pot favoriza mai mult partidele mici, decât cele mari;
   3.3) la $c = n/\Delta M$ se pot favoriza, dar rareori, atât partidele mari, cât şi cele mici.

Într-adevăr, conform condiției (24), cea mai mică predispunere de favorizare a partidelor, mici şi mari în măsură egală, este la $c = n/\Delta M$ (cazul 3.3). Dar, deoarece ΔM poate lua valori în intervalul $[1; n - 1]$, atunci, şi c_{eH} poate lua valori în intervalul $[n/(n - 1); n]$. În cadrul acestui interval (cazul 3), predispunerea de favorizare a partidelor este esențial mai mică, decât în afara lui (cazurile 1 şi 2). Totodată, conform Consecinței 1, odată cu creşterea c creşte şi predispunerea de favorizare a partidelor mici şi descreşte cea de favorizare a partidelor mari şi invers (cazurile 1, 2, 3.1 şi 3.2). ■

În Figura 2, esența Consecinței 2 este prezentată în formă grafică.

distribution of the following $\Delta M - 1$ seats, is neutralized by the decrease of c_{med}, at the removing of the following $\Delta X - 1$ seats. Then, on average, the value of c_{med} is equal to $Q/\Delta V$ and occurs (24). ▼

As regards to the definition area of c_{eH} values, given that $\Delta M \in [1; n - 1]$ (where $\Delta M = 0$ provides, at $c \geq 1$, the proportional distribution), we obtain: the lower limit of the definition area in question $n/\max\Delta M = n/(n - 1)$ and the upper limit $n/\min\Delta M = n/1 = n$.▼

Obviously, since ΔV only on average takes into account the values ΔV_i, $i = \overline{1, n}$ on the n parties, without regard to each value ΔV_i, $i = \overline{1, n}$ apart, the condition (24) is a one of Hamilton quasi-equilibrium and not of equilibrium. Even if the value of c is determined conform to (24), it does not guarantee that the GLD distribution in such conditions will coincide with the Hamilton one. At the same time, it will ensure, however, a relatively small difference of GLD distribution from the Hamilton one. ■

Consequence 2. When applying the GLD method:

1) if $c < n/(n - 1)$, then can be favoresed, as a rule, larger parties;
2) if $c > n$, then can be favoresed, as a rule, smaller parties;
3) if $n/(n - 1) \leq c \leq n$, then can be favorised both larger parties and the smaller ones, inclusive:
   3.1) at $n/(n - 1) \leq c < n/\Delta M$ can be favorised more larger parties than smaller ones;
   3.2) at $n/\Delta M < c \leq n$ can be favorised more smaller parties than larger ones;
   3.3) at $c = n/\Delta M$ can be favorised, but rare, both larger parties and smaller ones.

Indeed, under condition (24), the lowest predisposition of favoring parties, equally large and small, is at $c = n/\Delta M$ (case 3.3). But, because ΔM can have values in interval [1; n - 1], then c_{eH} can range in interval $[n/(n - 1); n]$. Within this interval (case 3), the predisposition of favoring parties is essentialy less, than outside it (cases 1 and 2). However, according to Consequence 1, with the increase of c increases the predisposition of favoring small parties and decreases the one of favoring large parties and vice verso (cases 1, 2, 3.1 and 3.2). ■

In Figure 2, the essence of Consequance 2 is shown in graphical form.

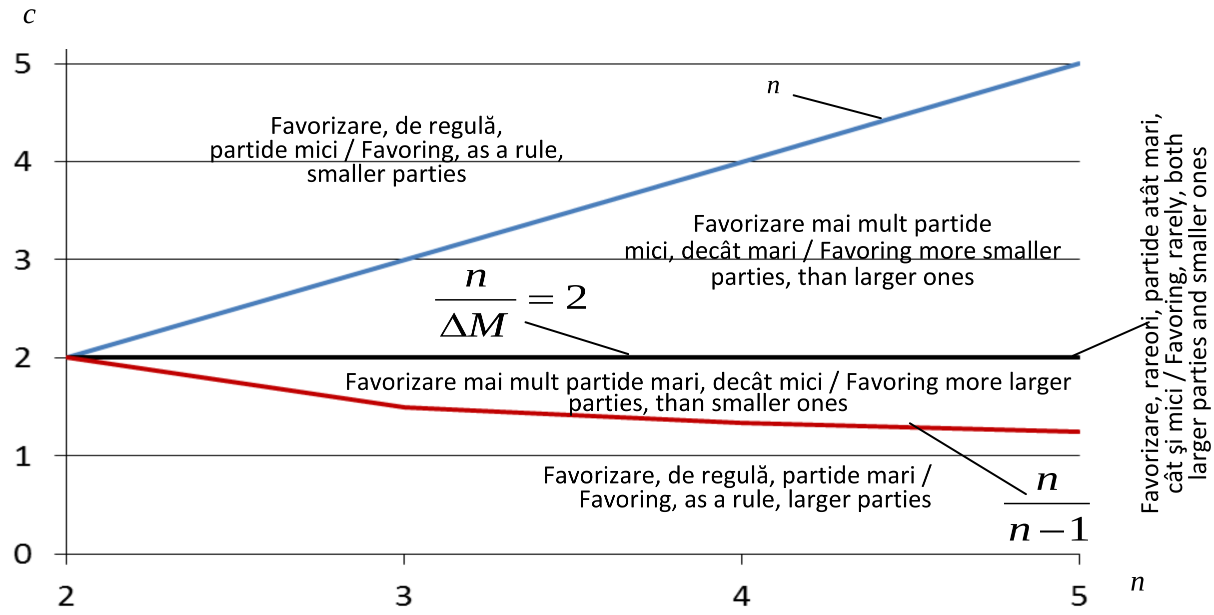

Figura 2. Favorizarea de partide DLG /
Figure 2. Favoring parties by GLD method, depending on the value of *c*

Condiţia (24) asigură cea mai apropiată de distribuirea Hamilton, în sensul indicelui (1), distribuire DLG. Însă, valoarea c, în acest caz, este dependentă de fiecare scrutin în parte prin mărimile ΔM şi n. Prezintă interes valoarea c, în acest sens, independentă de scrutin – valoarea medie pe totalitatea de valori posibile ale parametrilor ΔM şi n.

Afirmaţia 9. Pentru metoda DLG, valoarea optimă, în sensul indicelui (1) şi a non-favorizării de partide, independentă de scrutin a constantei c este, de regulă, egală cu 2.

Într-adevăr, să determinăm valoarea constantei c pentru media multitudinii de valori posibile ale ΔM în condiţia (24) de cvasi-echilibru Hamilton. Avem $\Delta M \in [1; n-1]$. Dacă $f(\Delta M)$ – intensitatea repartiţiei valorilor ΔM în intervalul $[1; n-1]$, este simetrică faţă de mijlocul acestui interval, egal cu $[1 + (n-1)]/2 = n/2$, adică $f(\Delta M{=}k) = f(\Delta M{=}n{-}k)$, $k = \overline{1, n-1}$, atunci, media$\Delta M = n/2$ şi $c_{opt} = n/$media$\Delta M = 2$.

Repartiţia valorilor mărimii ΔM în intervalul $[1; n-1]$ este determinată de repartiţia mărimilor $\Delta V_i = V_i - Qa_i$ în intervalul $(0; Q)$. Ultima este apropiată de cea uniformă, îndeosebi pentru valori relativ mari ale Q. De menţionat că repartiţia uniformă în cauză este un caz particular al celei simetrice faţă de mijlocul intervalului nominalizat. Din esenţa mărimilor implicate, rezultă că, la repartiţia uniformă a mărimilor ΔV_i în intervalul $(0; Q)$, repartiţia valorilor mărimii

Condition (24) ensures a GLD distribution that is nearest, in sense of index (1), to Hamilton one. But the value of c in this case is dependent on every election apart by ΔM and n sizes. It is of interest the value of c, in this respect that is independent on election - the average amount on all possible values of parameters ΔM and n.

Statement 9. For GLD method, the optimal value, in sense of index (1) and of non-favoring parties, of constant c, independent on scrutiny, is usually equal to 2.

Indeed, let determine the value of constant c for the average of multitude of possible ΔM values in condition (24) of Hamilton quasi-equilibrium. We have $\Delta M \in [1; n-1]$. If $f(\Delta M)$ – the intensity of repartition of ΔM values in interval $[1; n-1]$, is symmetrical to the middle of this interval, equal to $[1 + (n-1)]/2 = n/2$, ie $f(\Delta M{=}k) = f(\Delta M{=}n{-}k)$, $k = \overline{1, n-1}$, then average$\Delta M = n/2$ and $c_{opt} = n/$average$\Delta M = 2$.

The repartition of ΔM values in the interval $[1; n-1]$ is determined by the repartition of sizes $\Delta V_i = V_i - Qa_i$ in the interval $(0; Q)$. The latter is close to the uniform one, especially for relatively high values of Q. It is to mention that the uniform repartition in question is a particular case of the symmetrical one to the middle of the nominee interval. From the essence of involved quantities results that, at uniform repartition of sizes ΔV_i in the interval $(0; Q)$, the repartition of

ΔM în intervalul [1; n – 1] este simetrică față de mijlocul $n/2$ al acestui interval. În asemenea condiții, $c_{opt} = 2$. ▼

În ce priveşte non-favorizarea de partide, prin definiție, cu cât este mai mică disproporționalitatea, cu atât este mai puțin pronunțată favorizarea de partide, iar aceasta la metoda DLG, după cum este deja menționat, este cea mai mică la $c = 2$. ■

Caracterul simetric al repartiției valorilor mărimii ΔM în intervalul [1; n – 1], față de mijlocul $n/2$ al acestui interval, este confirmat prin simulări la calculator, unele rezultate ale cărora sunt prezentate în Exemplul 2.

Exemplul 2 de verificare a caracterului simetric al repartiției valorilor mărimii ΔM în intervalul [1; n – 1], față de mijlocul $n/2$ al acestui interval. Fie: $M = 100$; $n = 2, 3, 4, \ldots, 20$; valorile mărimilor V_i, $i = \overline{1,20}$ sunt distribuite uniform în intervalul (0; 20000]; mărime eşantion $N = 10$.

Pentru fiecare variantă k de valori V_i, $i = \overline{1,20}$, din cele $N = 10$, şi fiecare număr n de partide, din cele 19 ($n = \overline{2,20}$), se calculează: mărimea ΔM_{kn}, abaterea relativă a ΔM_{kn} de la $n/2$ şi $(\Delta M_{kn} – n/2)/(n/2) = \Delta M_{kn}/n – 1$. De asemenea, pentru fiecare variantă k de valori V_i, $i = \overline{1,20}$, din cele $N = 10$, se calculează media δ_k a abaterii relative de la simetrie, față de mijlocul $n/2$ al intervalului [1; n – 1], pe cele 19 cazuri de valori ale n, $\delta_k = \frac{1}{19}\sum_{n=2}^{20}\left(\frac{\Delta M_{kn}}{n} - 1\right)$ şi, totodată, se determină numărul L_k de cazuri din cele 19, în care $\Delta M_{kn} = n/2$. Ulterior, se calculează valoarea absolută $\bar{\delta}$ a mediei aritmetice a δ_k şi, de asemenea, media aritmetică $\bar{L}$ a L_k pe cele $k = \overline{1,10}$ variante de valori V_i, $i = \overline{1,20}$, adică, respectiv: $\bar{\delta} = |(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_N)/N|$ şi $\bar{L} = (L_1 + L_2 + \ldots + L_N)/N$.

Rezultatele finale ale calculelor sunt prezentate în Tabelul 2.

ΔM values in the interval [1; n - 1] is symmetrical to the middle $n/2$ of this interval. In such circumstances, $c_{opt} = 2$. ▼

With refer to non-favoring parties, by definition, the smaller is the disproportion, the less pronounced is the favoring of parties, and this for GLD method, as already mentioned, is the smallest at $c = 2$. ■

The symmetrical character of ΔM values repartition in the interval [1; n - 1] to the middle $n/2$ of this interval, is confirmed by computer simulations, some results of which are shown in Example 2.

Example 2 of the verification of symmetrical character of ΔM values repartition in the interval [1; n - 1] to the middle $n/2$ of this interval. Let: $M = 100$; $n = 2, 3, 4, \ldots, 20$; the V_i values are uniformly distributed in the interval (0; 20000]; sample size $N = 10$.

For each variant k of values V_i, $i = \overline{1,20}$, from the $N = 10$ ones, and each number n of parties, from the 19 ($n = \overline{2,20}$) ones, are calculated: size ΔM_{kn}, relative deviation of ΔM_{kn} from $n/2$ and $(\Delta M_{kn} – n/2)/(n/2) = \Delta M_{kn}/n – 1$. Also, for each variant k of values V_i, $i = \overline{1,20}$, from the $N = 10$ ones, are calculated the average δ_k of the relative deviation from the symmetry to the middle $n/2$ of the interval [1; n – 1], on the 19 cases of n values, $\delta_k = \frac{1}{19}\sum_{n=2}^{20}\left(\frac{\Delta M_{kn}}{n} - 1\right)$, and, at the same time, are determined the number L_k of cases from the 19 ones, in which $\Delta M_{kn} = n/2$. Further, are calculated the absolute value $\bar{\delta}$ of the δ_k arithmetic average and, also, the arithmetic average $\bar{L}$ of L_k on $k = \overline{1,10}$ variants of values V_i, $i = \overline{1,20}$, ie respectively: $\bar{\delta} = |(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_N)/N|$ and $\bar{L} = (L_1 + L_2 + \ldots + L_N)/N$.

The final results of calculations are shown in Table 2.

Tabelul 2 / Table 2

Rezultatele calculelor la exemplul 2 / Results of calculations to example 2

Varianta / Variant	δ_k	L_k		Varianta / Variant	δ_k	L_k
1	-0,020335	5		6	0,042722	4
2	-0,035913	3		7	0,000685	4
3	0,028442	3		8	-0,013380	4
4	0,035746	4		9	0,004492	7
5	-0,038981	5		10	-0,023438	7
Mediile / Averages $\bar{\delta}$, $\bar{L}$					0,001996	4,6

Datele Tabelului 2 arată că valoarea absolută $\bar{\delta}$ a mediei aritmetice a abaterii relative de la simetrie, față de mijlocul $n/2$ al intervalului $[1; n - 1]$, a valorii parametrului ΔM este de cca. 0,002 sau 0,2 %. De asemenea, pentru cca. $100\times4{,}6/19 \approx 24{,}2\%$ din cele $19\times10 = 190$ scrutine are loc $\Delta M = n/2$. Astfel, rezultatele calculelor confirmă justețea Afirmației 9.

Consecința 3. Metoda DLG la $c < 2$ favorizează partidele mari, iar la $c > 2$ – partidele mici.

Veridicitatea Consecinței 3 rezultă direct din Afirmația 9 şi Consecința 2, faptul fiind reprezentat în Figura 2. ■

10. Echilibrul Hamilton al metodei Divizor liniar variabil bipartit. Condiția de echilibru Hamilton bipartit DLG (11) poate fi extinsă pentru multitudinea de perechi de partide, ce pot fi formate din cele *n*, astfel fiind obținute condițiile de echilibru Hamilton şi definită metodă VD Divizor liniar variabil bipartit (DLVBP).

Afirmația 10. Echilibrul Hamilton se asigură de metoda DLVBP, care foloseşte regula VD

Data of Table 2 shows that the absolute value $\bar{\delta}$ of the arithmetic average of relative deviation from symmetry to the middle $n/2$ of interval $[1; n - 1]$ of parameter ΔM value is approx. 0.002 or 0.2%. Also, for approx. $100\times4{,}6/19 \approx 24{,}2\%$ of the $19\times10 = 190$ ballots takes place $\Delta M = n/2$. Thus, results of calculations confirm the correctness of Statement 9.

Consequence 3. GLD method at $c < 2$ favorises large parties, and at $c > 2$ – smaller parties.

The veracity of the Consequence 3 results directly from Statement 9 and Consequence 2, the fact being shown in Figure 2. ■

10. Hamilton equilibrium of Bipartite Variable Linear Divisor Method. Condition of GLD bipartite Hamilton equilibrium (11) can be extended for the multitude of pairs of parties, which can be formed from the *n* ones, thus being obtained the conditions of Hamilton equilibrium and defined Bipartite Variable Linear Divisor (BPVLD) method.

Statement 10. Hamilton equilibrium is ensured by BPVLD method, which uses the VD rule

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{V_i}{c_{ik}u_i + 1} > \frac{V_k}{c_{ik}u_k + 1} \qquad (25)$$

unde c_{ik} se determină conform (11).

Într-adevăr, valoarea *c*, în condiția (11) de echilibru Hamilton bipartit, depinde de media bipartită $\Delta U_{ik} = (\Delta U_i + \Delta U_k)/2$, fiind specifică pentru fiecare pereche de partide $\{i; k\}$. Din tranzitivitatea condițiilor $\Delta U_i > \Delta U_j$, $\Delta U_j > \Delta U_k$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, a condițiilor $\Delta U_i = \Delta U_j + \delta_j$, $\Delta U_j = \Delta U_k + \delta_k$, la $\delta_j > 0$ şi $\delta_k > 0$, rezultă tranzitivitatea şi a condițiilor $V_i/(c_{ij}u_i + 1) > V_j/(c_{ij}u_i + 1)$ şi $V_j/(c_{jk}u_k + 1) > V_k/(c_{jk}u_k + 1)$. Într-adevăr, înlocuind $V_i = Qu_i + \Delta U_i$, $V_j = Qu_j + \Delta U_j$ şi $c_{ij} = (\Delta U_i + \Delta U_j)/2$ în (4.77) (folosind indicele *j* în loc de cel *k*), în urma unor transformări simple, obținem $\Delta U_i(Qu_i + \Delta U_i) > \Delta U_j(Qu_j + \Delta U_j)$. În mod similar, se pot obține şi relațiile $\Delta U_j(Qu_j + \Delta U_j) > \Delta U_k(Qu_k + \Delta U_k)$. Deci, are loc şi $\Delta U_i(Qu_i + \Delta U_i) > \Delta U_k(Qu_k + \Delta U_k)$. ▼

De aceea, toate preferințele celor *n* partide pot fi ordonate conform regulii (25) cu divizor variabil, dependent de fiecare pereche de partide comparate $\{i; k\}$. Ținând cont de Afirmația 1, rezultatul obținut va coincide cu distribuirea Hamilton. Astfel, aceste două metode, DLVBP, ce foloseşte regula VD (25), şi Hamilton, sunt echivalente, în ce priveşte rezultatul distribuirii mandatelor. ■

where c_{ik} is determined conform (11).

Indeed, the value *c*, in condition (11) of bipartite Hamilton equilibrium, depends of bipartite average $\Delta U_{ik} = (\Delta U_i + \Delta U_k)/2$, being specific for each pair of parties $\{i; k\}$. From the transitivity of conditions $\Delta U_i > \Delta U_j$, $\Delta U_j > \Delta U_k$ or, what is the same, of conditions $\Delta U_i = \Delta U_j + \delta_j$, $\Delta U_j = \Delta U_k + \delta_k$, at $\delta_j > 0$ and $\delta_k > 0$, results the transitivity of conditions $V_i/(c_{ij}u_i + 1) > V_j/(c_{ij}u_i + 1)$ and $V_j/(c_{jk}u_k + 1) > V_k/(c_{jk}u_k + 1)$, too. Indeed, replacing $V_i = Qu_i + \Delta U_i$, $V_j = Qu_j + \Delta U_j$ and $c_{ij} = (\Delta U_i + \Delta U_j)/2$ in (4.77) (using index *j* instead of the *k*), as result of simple transformations we get $\Delta U_i(Qu_i + \Delta U_i) > \Delta U_j(Qu_j + \Delta U_j)$. Similarly, relations $\Delta U_j(Qu_j + \Delta U_j) > \Delta U_k(Qu_k + \Delta U_k)$ can be obtained. So, occurs also $\Delta U_i(Qu_i + \Delta U_i) > \Delta U_k(Qu_k + \Delta U_k)$. ▼

Therefore, all preferences of the *n* parties can be arranged conform to rule (25) with variable divisor, dependent on each pair of compared parties $\{i; k\}$. Considering the Statement 1, the obtained result will coincide with the Hamilton distribution. Thus, these two methods, BPVLD that uses VD rule (25) and Hamilton, are equivalent with refer to the result of seats distribution. ■

Metoda DLVBP permite obţinerea distribuirii Hamilton cu folosirea unei regulii VD cu divizor, metoda Hamilton fiind, totuşi, mai simplă în aplicare.

Consecința 4. La $n = 2$, condiția de echilibru Hamilton a metodei DLG se reduce la cea

BPVLD method allows obtaining the Hamilton distribution using a VD rule with divisor, the Hamilton method having, however, a simpler implementation.

Consequence 4. When $n = 2$, the condition of Hamilton equilibrium for GLD method reduces to the following

$$c = 2Q/(\Delta U_1 + \Delta U_2). \tag{26}$$

Într-adevăr, la $n = 2$ în (26), condiţia $c_{ik} = 2Q/(\Delta U_i + \Delta U_k)$ se reduce la cea $c_{12} = 2Q/(\Delta U_1 + \Delta U_2) = c$, valoarea c fiind comună pentru toate cele $n = 2$ partide. ■

Consecința 5. La $n = 2$, $c \geq 1$ şi $\Delta V_1 + \Delta V_2 > 0$, condiția de echilibru Hamilton pentru metoda DLG se reduce la cea

Indeed, at $n = 2$ in (26), the condition $c_{ik} = 2Q/(\Delta U_i + \Delta U_k)$ reduces to the $c_{12} = 2Q/(\Delta U_1 + \Delta U_2) = c$, the value of c being common to all of the $n = 2$ parties. ■

Consequence 5. When $n = 2$, $c \geq 1$ and $\Delta V_1 + \Delta V_2 > 0$, the condition of Hamilton equilibrium for GLD method reduces to the following

$$c = 2Q/(\Delta V_1 + \Delta V_2) = 2, \tag{27}$$

adică la aplicarea metodei Sainte-Laguë.

Într-adevăr, la $n = 2$, condiţia $c_{ik} = 2Q/(\Delta U_i + \Delta U_k)$ se reduce la cea $c_{12} = 2Q/(\Delta U_1 + \Delta U_2) = c$, valoarea c fiind comună pentru toate cele $n = 2$ partide. Totodată, la $n = 2$ şi $c \geq 1$, conform Consecinţei 6.1 din [4], metoda DLG respectă regula Cotei. Deci, au loc $a_1 \leq x_1 \leq a_1 +1$ şi $a_2 \leq x_2 \leq a_2 +1$. Astfel, mai întâi, pot fi alocate fiecărui partid câte a_i mandate, ca şi la metoda Hamilton, iar ultimul mandat se alocă folosind regula VD (6), la valoarea c determinată conform (26), în care $\Delta V_1 = \Delta U_1$, $\Delta V_2 = \Delta U_2$ şi, totodată, $\Delta V_1 + \Delta V_2 = Q$, adică conform (27). Se poate uşor observa că acest caz particular coincide cu metoda Sainte-Laguë. ■

Afirmația 11. Din multitudinea de alternative ale metodei DLG ce se deosebesc prin valoarea constantei c, Metoda Sainte-Laguë este, probabil, cea mai puţin predispusă spre favorizarea de partide aparte, asigurând cea mai mică disproporţionalitate a distribuirii mandatelor între partide, în sensul indicelui (1).

Într-adevăr, metoda Sainte-Laguë este caz particular al celei DLG la $c = 2$. Totodată, conform Afirmaţiei 9, pentru metoda DLG valoarea optimă, în sensul indicelui (1) şi a non-favorizării de partide, independentă de scrutin a constantei c este, de regulă, egală cu 2. ■

Consecința 6. Metoda Sainte-Laguë asigură, în medie, o mai mică favorizare de partide şi, respectiv, o mai mică disproporţionalitate a distribuirii mandatelor, în sensul indicelui (1), decât metoda d'Hondt.

Într-adevăr, ambele metode, Sainte-Laguë şi d'Hondt, sunt cazuri particulare ale metodei DLG la $c = 2$ şi, respectiv, $c = 1$. De aceea,

that is to the use of Sainte-Laguë method.

Indeed, at $n = 2$, the condition $c_{ik} = 2Q/(\Delta U_i + \Delta U_k)$ reduces to $c_{12} = 2Q/(\Delta U_1 + \Delta U_2) = c$, the value of c being shared for all the $n = 2$ parties. Also, at $n = 2$ and $c \geq 1$, according to Consequence 6.1 of [4], GLD method respects the Quota rule. So, occur $a_1 \leq x_1 \leq a_1 +1$ and $a_2 \leq x_2 \leq a_2 +1$. Thus, first to each party it may be allocated by a_i seats, as Hamilton method does, and the last seat is allocated by VD rule (6), at the value of c determined conform (26), in which $\Delta V_1 = \Delta U_1$, $\Delta V_2 = \Delta U_2$ and also $\Delta V_1 + \Delta V_2 = Q$, ie according to (27). One could notice that this particular case coincides with the Sainte-Laguë method. ■

Statement 11. From the multitude of GLD method alternatives that differs by the value of constant c, the Sainte-Laguë method is, probably, the least predisposed to favoring of parties apart, ensuring the lowest disproportion, in sense of index (1), of the distribution of seats among parties.

Indeed, the Sainte-Laguë method is a particular case of the GLD one at $c = 2$. However, according to Statement 9, for GLD method the optimal value, in sense of index (1) and of non-favoring parties, of constant c independent on scrutiny is, usually, equal to 2.■

Consequence 6. Sainte-Laguë method provides, on average, a lower party favoring and, respecttively, a lesser disproportionality of seats distribuition, in sense of index (1), than the d'Hondt method.

Indeed, both methods, Sainte-Laguë and d'Hondt, are particular cases of GLD method at $c = 2$ and, respectively, at $c = 1$. Therefore, the justețea consecinței rezultă direct din Afirmația 6. ■

11. Favorizarea DLV a partidelor

Înlocuind expresia $n/\Delta M$ pentru $c = c_{eH}$ a condiției de cvasi-echilibru Hamilton (24) în regula DLG (6), se obține regulă VD a metodei Divizor liniar variabil (DLV)

correctness of consequence results directly from Statement 6. ■

11. VLD favoring of parties

Substituting the expression $n/\Delta M$ for $c = c_{eH}$ of the Hamilton quasi-equilibrium condition (24) in GLD rule (6), is obtained the VD rule of the Variable Linear Divisor method (VLD)

$$i \succ k, \text{ dacă } \frac{V_i}{nu_i + \Delta M} > \frac{V_k}{nu_k + \Delta M}, \qquad (28)$$

Conform condiției de echilibru Hamilton (18) a metodei DLG, ținând cont că $c = n/\Delta M$, dacă $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \ldots = \Delta V_n = Q\Delta M/n$, atunci distribuirea DLV a mandatelor coincide cu cea Hamilton. În celelalte cazuri, soluțiile obținute pot să nu coincidă cu cele Hamilton.

Afirmația 12. Din multitudinea de alternative ale metodei DLG, ce se deosebesc prin valoarea mărimii c, fie şi dependente de parametrii n şi ΔM, cea mai puțin predispusă, probabil, spre favorizarea de partide aparte este metoda DLV, asigurând cea mai mică disproporționalitate a distribuirii mandatelor între partide, în sensul indicelui (1).

Într-adevăr, conform Afirmației 8, distribuirile DLV asigură cvasi-echilibrul Hamilton, fiind, în medie, cele mai apropiate de soluțiile Hamilton dintre cazurile particulare ale metodei DLG ce se deosebesc prin valoarea c. Deci, metoda DLV asigură, probabil, cea mai mică disproporționalitate a distribuirii mandatelor între partide, în sensul indicelui (1), şi este cea mai puțin predispusă spre favorizarea de partide. ■

Consecința 7. Metoda DLV este mai puțin predispusă spre favorizarea de partide aparte şi asigură o mai mică disproporționalitate a distribuirii mandatelor între partide, decât cea Sainte-Laguë.

Justețea consecinței rezultă direct din afirmațiile 8 şi 12. ■

Afirmația 13. Metoda DLV este, probabil, neutră privind favorizarea de partide.

Într-adevăr, conform Afirmației 8, condiția $c = n/\Delta M$ este una de cvasi-echilibru Hamilton pentru metoda DLG la $x_i \geq a_i$, $i = \overline{1,n}$. De asemenea, după cum este arătat la demonstrarea Afirmației 9, valoarea medie a ΔM este $n/2$, căreia îi corespunde valoarea $c = 2$ – valoare specifică metodei Sainte-Laguë, aceasta fiind, conform Afirmației 6 din [2], neutră. Totodată, la $c > 2$, conform Consecinței 3, se favorizează partidele mari, iar la $c < 2$ – se favorizează partidele mici. ■

12. Concluzii. Favorizarea partidelor prin metoda DLG este cercetată prin prisma comparării

Under the Hamilton equilibrium condition (18) of the GLD method, given that $c = n/\Delta M$, if $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \ldots = \Delta V_n = Q\Delta M/n$, then the VLD distribution of seats coincides with the Hamilton one. In other cases the resulting solutions may not coincide with the Hamilton ones.

Statement 12. From the multitude of GLD method alternatives that differs by the value of constant c, even dependent on parameters n and ΔM, the less predisposed, probably, to favoring of parties apart is the VLD method, ensuring the lowest disproportionality of seats distribution among parties, in sense of index (1).

Indeed, according to Statement 8, VLD distributions ensures the Hamilton quasi-equilibrium, being, on average, closest to Hamilton solutions, from particular cases of the GLD method that differs by the value of c. So, the VLD method ensures, probably, the smallest disproportionality of seats distribution among parties, in sense of index (1), and it is the less predisposed to favoring parties. ■

Consequence 7. DLV method is less predisposed to favoring parties apart and ensures a lower disproportionality of seats distribution among parties than the Sainte-Laguë.

The verocity of the consequence follows directly from statements 8 and 12. ■

Statement 13. VLD method is, probably, neutral with refer to favoring parties.

Indeed, according to Statement 8, the condition $c = n/\Delta M$ is one of Hamilton quasi-equilibrium for DLG method at $x_i \geq a_i$, $i = \overline{1,n}$. Also, as shown when proving Statement 9, the average value of ΔM is $n/2$, to which corresponds the value $c = 2$ – value specific to Sainte-Lague method, this being, according to Statement 6 of [2], neutral. At the same time, at $c > 2$, according to Consequence 3 are favored large parties and at $c < 2$ – are favored small parties. ■

12. Conclusions. Favouring of parties by GLD method is investigated through the comparison with Hamilton method. In this aim, cu metoda Hamilton. În acest scop, sunt introduse noțiunle de echilibru şi cvasi-echilibru Hamilton, iar regulile VD ale metodelor Hamilton şi DLG sunt uniformizate, fiind reprezentate prin acțiuni mai apropiate. Sunt identificate condițiile de predispunere a unui partid aparte la favorizarea de partide şi, de asemenea, faptul că predispunerea la favorizare a partidelor mai mici este crescătoare, iar cea de favorizare a partidelor mai mari este descrescătoare față de creşterea constantei *c*.

Este definită condiția de echilibru Hamilton între două partide şi sunt descrise cazuri aparte de echilibru şi cvasi-echilibru Hamilton. Sunt obținute expresiile analitice privind disproporționalitatea minimă şi cea maximă a distribuirii mandatelor pentru condiția de echilibru Hamilton a metodei DLG. Sunt descrise metoda Hamilton prin eliminare, metoda DLG prin eliminare, metoda Divizor liniar variabil şi metoda Divizor liniar variabil bipartit. Ultima este echivalentă, după soluții, cu cea Hamilton, deşi este o metodă cu divizor, drept că variabil. Sunt identificate domeniile de favorizare prin metoda DLG a partidelor mai mari sau a celor mai mici, în funcție de valorile mărimilor n, c şi ΔM. Este demonstrat că, în medie, metoda DLG favorizează partidele mari la $c < 2$, partidele mici la $c > 2$ şi nu favorizează niciun partid la $c = 2$.

Este demonstrat că, din multitudinea de alternative ale metodei DLG, ce se deosebesc prin valoarea constantei c, metoda Sainte-Laguë este, probabil, cea mai puțin predispusă spre favorizarea unor partide aparte, asigurând cea mai mică disproporționalitate a distribuirii mandatelor. Totodată, metoda DLV (cu divizor liniar variabil) este mai puțin predispusă spre favorizarea de partide aparte şi asigură o mai mică disproporționalitate a distribuirii mandatelor, decât metoda Sainte-Laguë.

Rezultatele obținute pot fi utilizate la cercetarea comparativă a diverselor metode VD.

notions of Hamilton equilibrium and quasi-equilibrium are introduced and VD rules of Hamilton and GLD methods are uniformizised, being represented by closer actions. Conditions of a party predisposing to favoring parties are identified and also is shown that the predisposition of favoring smaller parties is increasing, and of favoring larger parties is decreasing with the increase of *c*.

The condition of Hamilton equilibrium between two parties is defined and special cases of Hamilton equilibrium and quasi-equilibrium are described. Analytical expressions are obtained on the minimum and maximum disproportionality of seats distribution for the GLD method condition of Hamilton equilibrium. Hamilton method by elimination, GLD method by elimination, Variable Linear Divisor method and Bipartite Variable Linear Divisor methods are described. The last is equivalent, by solutions, with Hamilton method, although is a method with divisor, but a variable one. Are identified areas of GLD method favoring of larger parties or of smaller ones depending on values of n, c and ΔM. It is shown that, on average, GLD method favors large parties at $c < 2$, small parties at $c > 2$ and did not favor any party at $c = 2$.

It is shown that from the multitude of GLD method alternatives, which differs by the value of constant c, Sainte-Laguë method is, probably, the least predisposed to favor particular parties, ensuring the lowest disproportionality of seats distribution. However, the VLD method (its divisor is linearly variable) is less predisposed to favoring particular parties and ensures a disproportionality of seats distribution lesser than the Sainte-Laguë.

Obtained results can be used in comparative analyses of various VD methods.

Referințe/Referenses:

1. GALLAGHER, M. Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems// *Electoral Studies* (1991), 10:1, pp. 33-51.
2. BOLUN, I. Favoriing of multioptional decisions options*// Mathematical modeling, optimization and informatioc technologies*, intern. sc. confer., March 22-25, 2015. Ed. 5. Chisinau: ATIC, 2016.
3. BOLUN, I. Algorithmization of optimal allocation of seats in PR systems. // *Economica*, nr.3(77)/2011. - Chisinau: Editura ASEM. – pp. 137-152.
4. BOLUN, I. D'Hondt, Sainte-Laguë and GLD methods with refer to Quota rule // *Competitiveness and innovation in the knowledge economy*, intern. sc. confer., Sept. 25-26, 2015. Vol. 4: Part II. – Chisinau: Editura ASEM, 2015. – pp. 49-59.