REDUCEREA PROBLEMEI DE ACOPERIRE A UNUI GRAF CU MULŢIMI CONVEXE LA PROBLEMA DE COLORARE A UNUI HIPERGRAF

ANATOLIE PRISĂCARU[1]

Abstract
The problem of a graph covering with convex sets is investigated. It is shown that this problem may be reduced to a problem of a hipergraph colouring .

Key words: *convex set, d-segment, graph, hypergraph, hypergraph coloring, independent set, metric, system of cycles.*

JEL CLASSIFICATION - C65 Miscellaneous Mathematical Tools

Fie $G=(X,U)$ – un graf conex, neorientat, fără muchii multiple şi bucle, iar $d(x,y)$ o metrică obişnuită ataşată acestui graf, care este egală cu numărul de muchi ale lanţului cel mai scurt ce uneşte vârfurile $x,y \in X$.

În continuare vom cerceta o submulţime de vârfuri $M \subset X, |M| < \infty$ a grafului $G=(X,U)$.

Vom spune, că familia de submulţimi $S=\{S_1,...,S_k\}$ este o acoperire a mulţimii M cu submulţimi $d-$convexe, dacă $M=\bigcup_{i=1}^{k} S_i, S_i \subseteq M, i=1,...k$ şi fiecare S_i este o mulţime $d-$convexă, adică pentru orice două vârfuri $x,y \in S_i$, $d-$segmentul $\langle x,y\rangle = \{z | d(x,y)+d(z,y)=d(x,y)\}$ se conţine în mulţimea S_i .

Acoperirea ce conţine un număr minimal de submulţimi S_i o vom numi minimală, iar numărul de submulţimi din acoperirea minimală îl vom nota cu $N(M)$. Fără a încălca generalitatea, putem considera că mulţimea M este conexă şi $M \neq X$.

Definiţia 1.[Zykov A., 1974, Berge C., 1973] Se numeşte hipergraf perechea $H=(X,\mathrm{E})$, unde X este o mulţime de elemente numite vârfuri, iar E este o familie de submulţimi a mulţimii X numite muchii ale hipergrafului.

Definiţia 2.[Zykov A., 1974, Berge C., 1973] Se numeşte colorare a hipergrafului $H=(X,\mathrm{E})$ orice colorare a vârfurilor sale, astfel că fiecare muchie a hipergrafului are cel puţin două vârfuri colorate în culori diferite. Numărul minimal de culori necesar pentru a colora hipergraful H se numeşte număr cromatic al hipergrafului şi se notează cu $\chi(H)$.

Fie M o mulţime finită, iar $\mathrm{E}=\{E_1,...,E_k\}$ o familie de submulţimi a mulţimii M .

Definiţia 3.[Euler R. 1983**]** Perechea (M,E) se numeşte sistem de independenţă, dacă elementele lui E satisfac relaţiile:

$$Y \subseteq X \in \mathrm{E} \Rightarrow Y \in \mathrm{E}.$$

Mulţimea $X \subseteq M$ se numeşte independentă, dacă $X \in \mathrm{E}$ şi dependentă în caz contrar.

Definiţia 4. [Euler R. 1983**]** Mulţimea $X \in M$ se numeşte ciclu al sistemului de independenţă (M,E), dacă X este o mulţime dependentă minimală (după includere). Fie Ω mulţimea tuturor ciclurilor sistemului (M,E). Sistemul (M,Ω) se numeşte sistem de cicluri ce corespunde sistemului de independenţă (M,E).

Pentru mulţimea $M \subset X$ de vârfuri ale grafului $G=(X,U)$ definim sistemul de independenţă (M,E) şi sistemul de cicluri (M,Ω) în felul următor:

[1]Conferenţiar universitar, doctor în matematică, Academia de Studii Economice a Moldovei, Republica Moldova, mun. Chişinău, str. Mitropolit Gavriil Bănulescu-Bodoni, 61, MD-2005,Tel. (+37322) 224128; www.ase.md. Datele de contact ale autorului: Tel. (+37322) 402987, e-mail: a_prisacaru@yahoo.com.

$$\mathrm{E} = \{E \subseteq M | d - convE \subseteq M\};$$
$$\Omega = \{C \subseteq M | d - convC \not\subset M, \forall x \in C, d - conv(C \setminus x) \subseteq M\}$$

Teorema 1. Sistemul de submulţimi $\mathrm{E} = \{E_1,...E_k\}$ ale mulţimii $M \subset X$ este o partiţie a mulţimii M în mulţimi independente atunci şi numai atunci, cînd E determină o colorare a hipergrafului $H = (M, \Omega)$ cu k culori ((M, Ω) este sistemul de cicluri, ce corespunde sistemului de independenţă (M, E)).

Demonstraţie. Necesitatea. Dacă $\mathrm{E} = \{E_1,...E_k\}$ este o partiţie a mulţimii M în mulţimi independente, atunci E determină o colorare a hipergrafului $H = (M, \Omega)$. Într-adevăr, pentru orice $C \in \Omega$ avem $d - convC \not\subset M$, şi deci $C \not\subset E_i, i = 1,...,k$. De aici urmează că în C pot fi găsite două vârfuri colorate în culori diferite.

Suficienţa. Fie $\mathrm{E} = \{E_1,...E_k\}$ determină o colorare a hipergrafului $H = (M, \Omega)$ în k culori. Atunci $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = M$ şi $E_i \cap E_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$. Vom arăta că (M, Ω) este un sistem de independenţă.

Presupunem contrariul. Fie că există j, $1 \le j \le k$ pentru care mulţimea E_j nu este o mulţime independentă, adică $d - convE_j \not\subset M$. Vom alege un $E_j^{'}$ astfel ca $d - convE_j^{'} \not\subset M$, iar pentru orice $x \in E_j^{'}$ $d - conv(E_j^{'} \setminus x) \subseteq M$. Aceasta înseamnă că $E_j^{'} \in \Omega$, dar atunci $\mathrm{E} = \{E_1,...E_k\}$ nu determină o colorare a hipergrafului $H = (M, \Omega)$. Contradicţia obţinută ne arată că (M, Ω) este un sistem de independenţă.

Consecinţă. Dacă sistemul de mulţimi $\mathrm{E} = \{E_1,...E_k\}$ determină o partiţie a lui M în k mulţimi independente, atunci M poate fi reprezentată ca o reuniune de $k -$submulţimi $d -$convexe.

Teorema 2. Fie $M \subseteq X$ o submulţime de vârfuri ale grafului $G = (X, U)$, iar (M, Ω) sistemul de cicluri, ce corespunde sistemului de independenţă (M, E). Are loc relaţia $N(M) = \chi(H)$, unde $H = (M, \Omega)$ şi $\chi(H)$ este numărul cromatic al hipergrafului H.

Demonstraţia rezultă din afirmaţia teoremei precedente şi din faptul că colorării minimale îi corespunde o partiţie minimală a mulţimi M în mulţimi independente.

BIBLIOGRAFIE:

1. Zykov A. Hipergrafuri. UMN, 1974, 126p.
2. Berge C. Graphs an Hypergraphs, Amsterdam, 1973, 528p.
3. Euler R. On a classification of independent systems. Z. Oper. Res., 27(1983), p. 123-136.