

APPLICATION OF PARTIAL DERIVATIVES IN MARGINAL ANALYSIS OF ECONOMIC FUNCTIONS

APLICAREA DERIVATELOR PARȚIALE ÎN ANALIZA MARGINALĂ A FUNCTIILOR ECONOMICE

GULII Delia, studentă, specialitatea: Contabilitate

Academia de Studii Economice din Moldova, Republica Moldova,

Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61, www.ase.md

e-mail autor: gulii.delia@ase.md

Abstract: *These applications of the partial derivative to the marginal analysis of economic functions demonstrate the role of the partial derivative in economic reasoning analysis. They are more concerned with the examination of the economic variables' impact on outcomes with other variables as constants. The article presents a relatively brief history of the concept, attributing credit to work by the great mathematicians Euler, Lagrange, and Leibniz.*

The a priori argument presented in the article constitutes the basis upon which the operations of addition, subtraction, multiplication, and division in arithmetic are performed on one unit of money in microeconomics. Microeconomics makes use of economics to compare marginal costs and marginal benefits generated through an additional unit of activity. Partial derivatives make it possible to identify the marginal productivity of factor of production as well as factor savings. The marginal utility hypothesis is also tested out to prove how the consumers optimize their satisfaction through spending on certain products and services. The use of mathematical optimization, the article provides a proper demonstrative example of using the method of partial derivatives of derivative functions to maximizing profit in a specific set of relevant situations.

Partial derivatives are an important tool of marginal analysis, contributing significantly to increasing the efficiency and profitability of the economy.

Key words: *Partial derivatives, marginal analysis, economic functions, mathematical optimization, marginal productivity, marginal utility, marginal cost.*

JEL CLASSIFICATION: C02, C30.

INTRODUCERE

Încă din prima jumătate a secolului XX, derivatele parțiale au fost folosite pe larg în analiza economică marginală în literatura de specialitate. Acestea au fost utilizate în studiile anterioare pentru a analiza costurile și profiturile marginale, pentru a evalua efectele economice ale deciziilor luate de producători și consumatori și pentru a evalua eficiența piețelor. În economia modernă, derivatele parțiale joacă un rol esențial în analiza marginală, care este o metodă fundamentală de investigare a modului în care o variabilă economică se modifică atunci când o altă variabilă este ajustată, menținând celelalte constante. Acest concept este aplicat pe scară largă în diverse domenii ale economiei, cum ar fi analiza costurilor, maximizarea profiturilor, analiza producției și teoria alegerii consumatorului. Aplicarea derivatelor parțiale în analiza marginală a funcțiilor economice este un concept fundamental în economie, folosit pentru a studia schimbările mici ale unei variabile economice în funcție de modificările altor variabile.

În domenii precum econometria, teoria deciziilor și modelele economice multicriteriale, derivatele parțiale sunt utile, conform studiilor recente. Acestea au fost folosite pentru a analiza comportamentul consumatorilor și al producătorilor, marginalitatea produselor și serviciilor și optimizarea resurselor în contextul unei economii incerte. Totuși, impactul derivatelor parțiale asupra modelării macroeconomice și a analizei complexe a piețelor financiare sunt printre numeroasele aspecte care încă nu au fost abordate.

Scopul lucrării este de a sublinia aspectele teoretice și practice ale diferitor aplicații ale derivatelor parțiale în științele economice bazate pe rezolvarea de probleme. Ținând cont de fundamentele teoretice, se va realiza o scurtă trecere a istoriei matematicii despre științele economice, evidențiind importanța și aplicabilitatea acestora în acest domeniu de cunoaștere. În plus, se va lua în considerare aspectele generale ale derivatelor parțiale, cum ar fi definiția, notația și diferitele tipuri care există ca bază de bază pentru rezolvarea problemelor.

CONȚINUTUL DE BAZĂ

Literatura de specialitate consultată se ocupă de aplicarea matematicii în economie, în special de rolul derivatelor parțiale în analiza marginală a funcțiilor economice. Sursele includ lucrări de referință în matematică aplicată și economie, manuale și publicații științifice care subliniază rolul derivatelor parțiale în analiza costurilor, analiza veniturilor și optimizarea deciziilor. Sunt evidențiate contribuțiile unor teoreticieni clasici precum Euler, Lagrange și Leibniz la dezvoltarea acestui concept.

Metodele de cercetare aplicate în lucrare sunt unele analitice și matematice, inclusiv derivarea parțială a funcțiilor economice, pentru a determina productivitatea marginală, costurile și veniturile. În plus, au fost folosite studii de caz și tehnici de optimizare matematică pentru a demonstra relevanța practică a conceptelor teoretice în procesele de luare a deciziilor economice.

Această cercetare a demonstrat aplicabilitatea derivatelor parțiale la analiza marginală, optimizarea producției și maximizarea profitului. S-a constatat că aplicarea acestor metode face posibilă determinarea punctelor maxime și minime ale funcțiilor economice și, în consecință, luarea unor decizii de afaceri eficiente.

În matematică, procesul de examinare a pantei unei suprafețe într-o singură direcție la un moment dat se numește **diferențiere parțială**. Derivatele parțiale calculează rata de modificare a unei funcții a mai multor variabile în raport cu una dintre aceste variabile, menținând celelalte variabile fixe sau constante. Acest concept este esențial în analiza economică, în special în studiul funcțiilor de producție, al costurilor și al veniturilor marginale. *Prezent în lucrarea lui Cenușă (1990, p.45)*, derivata parțială este definită ca fiind modificarea funcției în raport cu o variabilă independentă, în condițiile în care ceilalți factori rămân constanți.

Interpretări economice ale derivatelor parțiale

Notația Leibniz pentru derivată este dy/dx , ceea ce implică faptul că y este variabila dependentă și x este variabila independentă. Pentru o funcție $z=f(x,y)$ din două variabile, x și y sunt variabilele independente și z este variabila dependentă.

Exemplul 1. Presupunem că funcția de producție a unui bun de consum este $z = 2xy - 3x^2 - y^2 + 18x + 10y$, unde x și y reprezintă factorii de producție (cantitățile de resurse), care asigură fabricarea volumului de producție z .

Atunci derivata parțială z'_x a funcției exprimă productivitatea marginală a factorului x și este egală cu $z'_x = 2y - 6x + 18$.

La fel, pentru productivitatea marginală a factorului y , avem derivata Z'_y a funcției: $Z'_y = 2x - 2y + 10$.

Analiza marginală se constituie drept o tehnică de optimizare valabilă în procesul luării deciziilor în condiții de certitudine prin care se determină nivelul de activitate ce maximizează profitul sau minimizează cheltuielile. După cum este *prezent în lucrarea lui Raischi et al. (2000, p.88)*, analiza marginală ajută la stabilirea punctului de maxim economic prin egalarea derivatelor cu zero, proces fundamental în luarea deciziilor economice.

Analiza marginală reprezintă o tehnică utilizată pentru compararea proiectelor alternative, prin evidențierea diferențelor dintre veniturile și cheltuielile previzionate ale acestora. Contabilul organizează informațiile relevante pentru a determina care dintre alternative contribuie cel mai mult la profituri sau generează cele mai mici costuri. *Conform explicațiilor din Purcaru (1997, p.110)*, analiza marginală permite evidențierea doar a datelor diferite pentru fiecare opțiune analizată.

În economie, **termenul de analiză marginală** se referă la practica utilizării unei derivate pentru a estima modificarea valorii unei funcții rezultată dintr-o creștere cu 1 unitate a uneia dintre variabilele sale.

Exemplu 2: Se estimează că producția săptămânală a unei anumite fabrici este dată de funcție $Q(x, y) = 1200x + 500y + 2xy - 13x - y$ unități, unde x este numărul de calificați muncitori și y numărul de muncitori necalificați angajați în fabrică. În prezent, forța de muncă este formată din 30 de muncitori calificați și 60 de muncitori necalificați.

Utilizați analiza marginală pentru a estima modificarea producției săptămânale care va rezulta din adăugarea a încă 1 muncitor calificat dacă numărul de muncitori necalificați nu este modificat.

Soluție. Derivata parțială $Q_x(x, y) = 1200 + 2y - 13$ este rata de modificare a producției în raport cu numărul de muncitori calificați. Pentru orice valori ale lui x și y , aceasta este o aproximare a numărului de unități suplimentare care vor fi produse în fiecare săptămână dacă numărul de muncitori calificați crește de la x la $x + 1$, în timp ce numărul de muncitori necalificați este menținut fix la y .

Utilitatea marginală este satisfacția suplimentară pe care o primește un consumator de a avea încă o unitate dintr-un bun sau serviciu. După cum *este descris în lucrarea lui Purcaru (1997, p.112)*, conceptul de utilitate marginală este folosit de economiști pentru a determina cât de mult dintr-un articol sunt dispuși să cumpere consumatorii.

Se poate distinge *utilitatea marginală pozitivă*, care apare atunci când consumul unui articol suplimentar crește utilitatea totală, și *utilitatea marginală negativă* apare atunci când consumul de încă o unitate scade utilitatea totală.

Aplicații ale costului marginal și a venitului marginal

Funcția de cost

Costul total de producție al numărului x de produse, reprezentat de $C(x)$, poate fi scris ca –

$$C(x) = F(x) + V(x)$$

unde,

$F(x)$ = Costul fix, independent de numărul de produse fabricate. De exemplu – Salariul plătit de companie lucrătorilor săi, chiriile proprietății și costurile de întreținere etc. pot fi independente de numărul de articole pe care le produc într-o anumită lună.

$V(x)$ = Costul variabil, care depinde de numărul de produse fabricate. De ex. – Costul ambalării și transportului mărfurilor fabricate, care depinde în mod evident de numărul de bunuri produse.

Funcțiile veniturilor și profitului

Notată cu $R(x)$, funcția de venituri reprezintă suma de bani câștigată (cifra de afaceri totală) de o companie, prin vânzarea x număr de produse. Dacă prețul de vânzare al fiecărei unități este egal cu SP , funcția de venituri ar fi -

$$R(x) = SP \times x$$

Acum, dacă funcția de cost și funcția de venit pentru x produse iau valoarea $C(x)$ și respectiv $R(x)$, atunci putem scrie funcția profit $P(x)$ ca -

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Tabelul 1. Aplicarea Derivatelor Parțiale În Analiza Funcțiilor Economice

Exemplu / Studiu de caz	Funcția economică	Derivata parțială	Rezultat / Interpretare
Funcția de producție (Exemplul 1)	$z = 2xy - 3x^2 - y^2 + 18x + 10y$	$z'_x = 2y - 6x + 18$	Productivitatea marginală a factorului x
		$z'_y = 2x - 2y + 10$	Productivitatea marginală a factorului y
Estimarea producției săptămânale	$Q(x, y) = 1200x + 500y + 2xy - 13x - y$	$Q'_x = 1200 + 2y - 13$	Creșterea producției săptămânale prin angajarea unui muncitor calificat în plus

Studiu de caz final (optimizare profit)	$P = 64x + 32y - 2x^2 - 4y^2 + 4xy$	$P'_x = 64 - 4x + 4y$	Profit maxim la $x = 40, y = 24$
		$P'_y = 4x - 8y + 32$	Profit maxim obținut: 1650 USD

Sursa: https://www.researchgate.net/publication/332708332_Matematici_aplicate_in_economie

Tabelul evidențiază utilizarea derivatelor parțiale în analiza economică pentru a determina productivitatea marginală, a optimiza producția și a maximiza profitul. Prin calcule derivate parțiale, sunt identificate punctele critice în care întreprinderile pot maximiza profiturile sau pot obține o creștere eficientă a producției.

CONCLUZII

Derivatele parțiale joacă un rol proeminent în economie, în care majoritatea funcțiilor descriu comportamentul economic presupune că comportamentul depinde de mai mult de o variabilă. De exemplu, o funcție de consum social poate descrie suma cheltuită pentru bunuri de consum ca fiind dependentă atât de venit, cât și de avere; înclinația marginală a consuma este atunci derivata parțială a funcției de consum în raport cu venitul.

Prin definiția derivatelor parțiale găsim derivate de ordinul întâi și de ordinul doi până la derivate de ordin superior și funcțiile lor de diferențiale și gradientul unei funcții și funcția lor de reguli de lanț care se aplică pe funcții. Găsirea funcției aproximărilor tangente și funcția lor este continuă și diferențiabilă și în principal majoritatea derivatelor parțiale se aplică în economie și comportamentul lor în funcție.

Din ce în ce mai mulți economiști și administratori consideră că folosirea matematicii ca limbaj simbolic și metodă de raționament științific reprezintă un ajutor de neprețuit în sarcinile și obiectivele acestor științe. Prezența sa este fundamentală atât în descrierea relațiilor economice complexe, cât și în formularea de propoziții despre relațiile comportamentale.

REFERINȚE:

1. Cenușă, Gh., V. Burlacu, R. Coroi, Toma, M., & Filip, A. (1990). *Matematici aplicate in economie*. Tipografia A.S.E.
2. Cenușă, Gh., Raischi, C., Baz, D., Toma, M., Burlacu, V., Sacuiu, I., & Mircea, I. (2000). *Matematici pentru economisti*. Cison, Bucuresti
3. Purcaru, I. (1997). *Matematici generale si elemente de optimizare*. Editura economică, Bucuresti

Coordonator științific: TACU Mariana, drd., asist.univ.,
 Academia de Studii Economice din Moldova
 Republica Moldova, Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61,
 e-mail: tacu.mariana@ase.md