

MAXIMIZING PROFIT USING SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRODUCTION FUNCTIONS

MAXIMIZAREA PROFITULUI UTILIZÂND ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE GRADUL II ÎN FUNCȚIILE DE PRODUCȚIE

JOSANU Dumitrița-Ariadna, studentă, specialitatea: Contabilitate

Academia de Studii Economice din Moldova, Republica Moldova,

Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61, www.ase.md

e-mail autor: josanu.dumitrita@ase.md

Abstract: Profit maximization is a traditional concept in economics and a basic principle of the economic theory of corporate finance. The role of second-order differential equations in the optimization of the production function: a în These equations allow us to quantitatively study how inputs (such as labor and capital) relate to total output. Resource-level studies identify points at which resource allocation is optimal, ensuring maximum profit. Using quadratic production functions as a mathematical model, this paper shows that decision making in an economic system is based on theoretical modeling using differential equations. The case of corresponding production functions and its impact on profit maximization are also studied. The results demonstrate the real-world application of advanced mathematical methods in economic optimization.

Keywords: profit maximization, second-order differential equations, production functions, optimization, economic modeling

JEL CLASSIFICATION: C61, D24

INTRODUCERE

În sfera economică modernă, maximizarea profitului este o sarcină prioritară pentru entitățile corporative, deoarece este strâns legată de utilizarea eficientă a resurselor disponibile. Introducerea metodologiilor matematice avansate, cum ar fi ecuațiile diferențiale de ordinul doi, oferă o bază analitică consistentă pentru optimizarea funcțiilor economice complexe.

În primul rând, ecuațiile diferențiale de ordinul doi facilitează modelarea relațiilor dinamice dintre variabilele economice, cum ar fi factorii de producție, capitalul, forța de muncă și producția totală. În lucrarea „*Dinâmica Não Linear em Economia*” subliniază că modelele liniare clasice nu iau în considerare comportamentul economic instabil și adesea haotic al economiei reale. După cum afirmă Prokhorov, „*nonlinear dynamics can be represented by nonlinear difference and differential equations*” (Prokhorov, 2001, p.14), în limba română ar însemna dinamica neliniară poate fi reprezentată prin diferențe neliniare și ecuații diferențiale. Astfel, definirea utilizării ecuațiilor diferențiale, mai precis, de ordinul doi, facilitează predicția comportamentului haotic al ecuațiilor diferențiale neliniare, exemplificate prin strategii de maximizare a profitului în cadrul unei economii instabile.

Scopul lucrării este dedicată analizei aplicării ecuațiilor diferențiale de ordinul doi în optimizarea funcțiilor de producție, în special, luarea în considerare a definiției punctelor extreme locale care conduc la maximizarea profitului.

Metodologia se bazează pe aplicarea unor metode analitice și deductive complexe cu aplicarea criteriului Hessian și a formei pătratice a funcțiilor economice aferente la verificarea condițiilor extremului local. Astfel, documentul oferă o bază științifică relevantă pentru optimizarea procesului de luare a deciziilor economice strategice și distribuirea eficientă a resurselor de producție.

CONȚINUTUL DE BAZĂ

Ecuatiile diferențiale, în special cele de ordinul doi, sunt instrumentul principal al formalismului matematic al proceselor economice. Ele formulează relații funcționale între variabila dependentă și derivatele acesteia, ceea ce oferă logica necesară studierii fenomenelor dinamice ale sistemelor de producție. Forma generală a unei ecuații diferențiale de ordinul doi este:

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$, unde :

- y simbolizează o variabilă economică modelată (outputul)
- $a(x), b(x), c(x)$ sunt influențate de tipul de interacțiune dintre inputuri și output.

În literatura de specialitate se comentează împărțirea acestor ecuații în **omogene** și **neomogene**, iar apoi în **coeficienți constanți** sau **variabili**. Mult mai des, la modelarea proceselor cu stabilitate structurală, se folosesc ecuații neomogene cu coeficienți constanți (Darzu, 2020).

Funcțiile de producție sunt formule care determină modul în care resursele disponibile (capital și forță de muncă) sunt utilizate pentru a fi transformate în producție economică. În reprezentarea clasică, funcțiile sunt împărțite în **funcții liniare**, **pătratică** și **Cobb-Douglas**, fiecare modelând grade diferite de corelație între datele de inputuri.

Funcția de producție Cobb-Douglas a fost dezvoltată empiric pentru a reflecta relația dintre **inputuri** și **output economic** în activitatea economică a sectoarelor industriale. Modelul are o formă generală:

$$Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, \quad \text{unde:}$$

- Q este **producția totală**,
- K este **capitalul**,
- L este **munca**,
- A, α , și β sunt parametri pozitivi, constanți.

Cobb și Douglas notează că o posibilă formă a funcției de producție este:

$$Q = bL^k K^{\{1-k\}}$$

Principala observație este că relația dintre cele două tipuri de venit – dintre muncă și capital – rămâne relativ stabilă în timp, indicând faptul că există **stabilitate structurală** în formula (Cobb & Douglas, 1928).

Această funcție reflectă **randamentele la scară**. Când $\alpha + \beta = 1$, funcția exprimă **randamente constante**, ceea ce înseamnă că dublarea inputurilor va duce la o dublare a rezultatului. Dacă suma este mai mică de 1, apar **randamente decrescânde**, în timp ce dacă suma este mai mare de 1, apar **randamente crescânde**. Amestecarea **inputuri** și **outputuri** este un factor important în maximizarea profiturilor. Aceasta poate însemna **substituție** (un input îl poate înlocui cu altul), **complementaritate** (inputurile trebuie utilizate împreună) și **randamentele la scară** (crearea de eficiențe prin creșterea sau scăderea inputurilor). În acest context, Varian a arătat cum **derivatele parțiale** ale funcției de producție pot fi utilizate pentru a găsi **productivitatea marginală**, explicând că analiza Hessiană a funcției determină reprezentările optimității (Varian, 1992).

În contextul **maximizării profitului**, funcția de producție exprimată sub formă pătratică

$$Q = aK^2 + bL^2 + cKL + dK + eL + fQ$$

permite relații neliniare și ordine superioare dintre inputuri. Acest lucru este potrivit pentru modelarea anumitor scenarii din lumea reală în cazul în care economia relațiilor capital-muncă nu sunt perfect proporționale. **Derivatele parțiale** și analiza semnelor **matricei Hessiene** sunt utilizate pentru a găsi nivelurile optime de intrări care produc profituri maxime, ceea ce este o aplicare simplă a **ecuațiilor diferențiale de ordinul doi**.

Forma pătratică este realizabilă prin construirea **matricei simetrice** corespunzătoare, iar semnul valorilor proprii determină natura extremului (minim, maxim). De exemplu, o matrice Hessiană definită negativă indică faptul că funcția are un **maxim local** (Munteanu, 2015). Aplicată în

domeniul economic, această metodă implică luarea derivatelor parțiale ale funcției cuadratică în raport cu intrările și rezolvarea sistemului de tip:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 2aK + cL + d = 0, \frac{\partial Q}{\partial L} = 2bL + cK + e = 0$$

În procesul de **maximizare a profitului**, este necesar de a utiliza ecuațiile diferențiale de ordinul doi care pot fi utilizate datorită capacității lor de a găsi punctele critice ale funcției de profit. Aceste puncte de obținere a profitului corespund satisfacției output-ului funcției, $\Pi = TR - TC$ (Enachi, 2020, p.47), de către inputuri (K și L) și rezolvând sistemul de ecuații care este rezultatul eliminării derivatelor parțiale. Pentru a verifica că punctul identificat este un maxim local, matricea Hessiană a funcției trebuie construită și analizată, care trebuie să fie definit negativ. Dacă Hessiana îndeplinește condițiile de a fi semi-definit negativ, atunci se confirmă că punctul critic optimizează funcția de profit (Bălă, 2015).

CONCLUZII ȘI RECOMANDĂRI

În cele din urmă, se poate observa că utilizarea ecuațiilor diferențiale de ordinul doi este importantă atunci când se analizează funcții economice complexe, în special pentru determinarea punctelor optime ale funcției de profit. Într-un mediu economic din ce în ce mai competitiv, în care deciziile de producție și de alocare a resurselor trebuie susținute de modele riguroase, utilizarea acestor ecuații oferă o bază formală și previzibilă pentru identificarea maximelor locale. Analizând derivatele de ordin superior și semnul formei pătratice corespunzătoare (matricea Hessiană), putem formula condițiile obiective pentru existența unui maxim. În acest context, evaluarea unui maxim local este simplificată semnificativ prin efectuarea unei analize obiective a relațiilor dintre intrări și ieșiri, ceea ce reduce costurile de luare a deciziilor economice. În prezent, s-a format o prezentare argumentativă care a determinat, pe de o parte, valoarea teoretică a acestor metode, iar pe de altă parte, semnificația lor practică în condițiile economice moderne.

REFERINȚE:

1. Bălă, D. (2015). *Metode cantitative*. <https://www.editurauniversitaria.ro/storage/publications/rasfoire/InvyR707PeWhQxEZumlDCI0AB.pdf>
2. Cobb, C.W., Douglas P.H. (1928). *A Theory of Production*. <https://www.jstor.org/stable/1811556?seq=1>
3. Darzu, V. (2020). *Matematici Speciale*. https://www.math.ubbcluj.ro/~vdarzu/Cursuri/Matematici_speciale_curs_5.pdf
4. Enachi, O. (2020). *Teorie Economică*. ASEM.
5. Munteanu, F. (2015). *Algebră liniară și geometrie, analitică și geometrie diferențială*. https://www.ucv.ro/pdf/departamente_academice/dma/suporturi_curs/Algebra liniara%2C_geometrie_analitica%20si%20diferentiala_curs-STERBETI_CATALIN.pdf
6. Prokhorov, A.B. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Economics: a Historical Perspective*. <https://shorturl.at/YW6Od>
7. Varian, H.R. (1992). *Microeconomic analysis*. https://nibmehub.com/opac-service/pdf/read/Varian_%20Microeconomic%20Analysis-%203rd.%20E.pdf

Coordonator științific: TACU Mariana, drd., asist. univ.,
Academia de Studii Economice din Moldova,
Republica Moldova, Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61
Telefon: +37379463344
e-mail: tacu_mariana@yahoo.com