SELECȚIA MOMENTELOR ȘI METODA MOMENTELOR GENERALIZATE ÎN CAZUL MODELELOR HETEROSKEDASTICE

Prof. univ. dr. Constantin ANGHELACHE, Academia de Studii Economice, București Universitatea „Artifex” din București, Prof. univ. dr. Alexandru MANOLE, Universitatea „Artifex” din București, Conf. univ. dr. Mădălina-Gabriela ANGHEL, Universitatea „Artifex” din București

În acest articol, autorii descriu metodele de selecţie a momentelor şi aplicarea metodei momentelor generalizate pentru modelele de tip heteroskedastic. Utilitatea estimatorilor GMM se regăsește în studiul modelelor piețelor financiare. Criteriul de selecție de momente se aplică pentru estimarea eficientă a GMM a seriilor de timp univariate cu erori martingale de diferenţă asemănătoare cu cele studiate până acum de Kuersteiner.

Cuvinte-cheie: *momente, estimatori, aproximare, restricție, dependență.*

JEL: B16; C01; C1.

1. Noțiuni introductive

Se analizează proprietăţile asimptotice de ordinul doi ale estimatorilor standard GMM printr-o aproximare asimptotică MSE.

Analiza de ordin superior confirmă rezultatele lui Kuersteiner, şi anume că înclinarea (bias) de ordin superior a estimatorului este independentă de numărul de **valori** dintr-un anumit interval.

SELECTION MOMENTS AND GENERALIZED METHOD OF MOMENTS FOR HETEROSKEDASTIC MODELS

Professor, PhD Constantin ANGHELACHE, Bucharest University of Economic Studies “Artifex” University of Bucharest Profesor, PhD Alexandru MANOLE, “Artifex” University of Bucharest Assoc. Prof., PhD Mădălina-Gabriela ANGHEL, “Artifex” University of Bucharest

In this paper, the authors describe the selection methods for moments and the application of the generalized moments method for the heteroskedastic models. The utility of GMM estimators is found in the study of the financial market models. The selection criteria for moments are applied for the efficient estimation of GMM for univariate time series with martingale difference errors, similar to those studied so far by Kuersteiner.

Key words: *moments, estimators, approximation, restriction, dependence*

JEL: B16; C01; C1.

1. Introduction

Considering asymptotic properties of standard GMM, estimators are analysed through an asymptotic approximation by MSE.

Higher order analysis confirms the results of Kuersteiner, namely that the bias of higher order estimator is independent of the number of **values** in a certain range.

2. Unele aspecte privind modelele şi estimatorii

Modelul considerat este de forma:

2. Some aspect concerning models and estimators

The model is considered as:

$$y_t = \emptyset(1)\mu + \emptyset_1 y_{t-1} + \cdots + \emptyset_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$, unde/ where (1)

ε_t sunt diferenţe martingale secvenţiale cu $E|\varepsilon_t|^{12} < \infty$.

Proprietatea diferențelor martingale a ε_t impune restricţii asupra momentelor de ordinul patru. Aceste restricții rezultă din definirea funcției de mai jos, care îndeplinește patru condiții:

ε_t are sequential martingale differences $E|\varepsilon_t|^{12} < \infty$.

Martingale property differences of ε_t impose restrictions on order four moments. These restrictions result from defining the function below that meets four conditions:

$$\sigma(s,r) = \begin{cases} E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-|s|}\varepsilon_{t-|r|}, r \neq s \\ E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-s)}^2 - \sigma^4, r = s \end{cases}, \text{ pentru/ for } r,s \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (2)$$

Prima condiție (i) ε_t este strict staţionară şi relațiile,

First condition (i) ε_t It is strictly stationary and relationships,

$$E(\varepsilon_t \, |F_{t-1}) = 0 \text{ , (ii), } E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0 \text{, (iii),}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |\, \sigma(s,r)| = B < \infty \text{, (iv) , } E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-s)}^2 \neq 0 \text{ pentru orice/for any s, (v).}$$

Presupunerea de mai sus (iii) exclude distribuțiile deviate. O consecinţă a presupunerii (i) – termenii cu formă $E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-r})$ sunt diferiţi de 0 pentru $r \neq s \neq 0$ şi depind de s pentru $s = r \neq 0$. Ultima presupunere (iv) limitează dependenţa de ordinul superior prin impunerea unei condiţii de însumare a cumulanţilor de ordinul patru.

A doua condiție are la bază:

Preposition from above excludes derivate distributions. A consequence of (i) – terms with the form $E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-r})$ are different from 0 for $r \neq s \neq 0$ and depend on s for $s = r \neq 0$. The last Preposition (iv) limits the dependence of higher order by imposing a condition of summing fourth order cumulants.

The second remark is based on the fact that for:

pentru/ for $cum(\varepsilon_{t_1}, \ldots, \varepsilon_{t_k})$ cu $E|\varepsilon_t|^{12} < \infty$.

unde/ where $cum_{v_1 \ldots v_k}(\varepsilon_{t_1}, \ldots, \varepsilon_{t_k}) \equiv \frac{\partial^{v_1 + \cdots + v_k}}{\partial \xi_1^{v_1} \ldots \partial \xi_k^{v_k}} ln\emptyset_{j_1 \ldots j_{k,} j_1}(\xi)|_{\xi=0}$

şi/ and $\sum_{t_1 \ldots t_{k-1} = -\infty}^{\infty} |1 + t_k| \; cum(\varepsilon_{t_1}, \ldots, \varepsilon_{t_k})| < \infty, pentru/\,for\; k = 2, 3, \ldots, 12.$

Pentru a garanta identificarea parametrilor $\emptyset = (\emptyset_1, \ldots, \emptyset_p)$, impunem restricţii asupra parametrului spaţiu, care asigură soluţia staţionară pentru (1) şi garantează autoregresia şi mişcarea mediei modelului.

In order to ensure the identification parameters $\emptyset = (\emptyset_1, \ldots, \emptyset_p)$ we impose restrictions on the parameter space, that assures the stationary solution (1) and and guarantees autoregression and the moving average.

Condiția a treia are la bază faptul că, dacă $C(\beta, L) = \frac{\theta(L)}{\emptyset(L)}$, parametrul spațiu $\Theta \subset int\Theta_0$, unde $\Theta_0$este un subset al $\mathbb{R}^d$ definit prin $\Theta_0 = \{\beta \in \mathbb{R}^d | \emptyset(\xi) \neq 0$ pentru $|\xi| \leq 1$, $\theta(\xi) \neq 0$ pentru $|\xi| \leq 1, \theta(\xi), \emptyset(\xi)$ nu au zerouri comune, $\theta_q \neq 0$ sau $\emptyset_p \neq 0\}$. Presupune ca Θ este compact în $\mathbb{R}^d$.

Ultima condiție are la bază faptul că $\widehat{b_k}$ un estimator a lui b_k astfel, încât $\|\widehat{b_k} - b_k\|/\|c_k\| = O_p(n^{-\frac{1}{2}}(logn)^{\frac{1}{2}}, unde\ c_k$ este secvența nestocastică, precum şi $\sum_{k=0}^{\infty}\|c_k\| < \infty$.

Îndeplinindu-se aceste condiții, rezultă că diferențele martingale impun restricțiile despre care am amintit.

3. Aproximarea asimptotică de ordinul doi

Aproximările sunt dezvoltate în jurul versiunii optim imposibilă a estimărilor, definite de relația $z_{t,\infty} = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$, iar matricea de greutăţi optimă are forma:

The third condition is based on the fact that, if Let $C(\beta, L) = \frac{\theta(L)}{\emptyset(L)}$. The space parameter $\Theta \subset int\Theta_0$, where $\Theta_0$is a subset of $\mathbb{R}^d$ definite by $\Theta_0 = \{\beta \in \mathbb{R}^d | \emptyset(\xi) \neq 0$ for $|\xi| \leq 1$, $\theta(\xi) \neq 0$ for $|\xi| \leq 1, \theta(\xi), \emptyset(\xi)$ no common zeros, $\theta_q \neq 0$ or $\emptyset_p \neq 0\}$. It assumes that Θ is compact in $\mathbb{R}^d$.

The last condition is ased on the fact that $\widehat{b_k}$ an estimator of b_k so that $\|\widehat{b_k} - b_k\|/\|c_k\| = = O_p(n^{-\frac{1}{2}}(logn)^{\frac{1}{2}}, where\ c_k$ is a non-stochastic sequence as $\sum_{k=0}^{\infty}\|c_k\| < \infty$.

Fulfilling these conditions is that impugn restrictions martingale differences which I have mentioned.

3. Asymptotic approximation of the second order

Approximations are developed around impossible optimum version of estimators, definite by the relationship $z_{t,\infty} = = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ and optimal weight matrix:

$$\Omega = \sum_{j=-q}^{q} Eu_{t+q}u_{t+q-j}z_{t,\infty}z'_{t-j,\infty}$$

Ω este un operator inversabil şi l^2 operatorul de spaţiu. Înseamnă că $P'\Omega^{-1} \in l^2$ pentru $P' = [b_1, b_1, ..]$ ar fi clasificate două linii în l^2. Acest lucru implică $q_t^{\infty} = P'\Omega^{-1}z_{t,\infty}$ care există aproape sigur, este staționar şi are două momente finite.

Se impun condiții adiționale asupra Ω si Ω^{-1}.

Fie $\omega_{i,j}$ elementul i, j al lui Ω şi fie $v_{i,j}$ elementul i, j a lui Ω^{-1}. Presupunem că $\omega_{i,j} = g_\omega(i-j) + o(\lambda_\omega^{|i-j|})$ şi $v_{i,j} = g_v(i-j) + o\left(\lambda_v^{|i-j|}\right)$ pentru valorile constante $\lambda_\omega, \lambda_v \epsilon (0,1)$ şi funcţiile g_ω şi g_v astfel, încât $g.(M) = O(\lambda^M)$.

Condiția impune rate exponențiale de degradare pentru elementele ce nu se află pe diagonala lui Ω şi Ω^{-1}. Aceste rate sunt

Ω a reversible operator and l^2 a space operator. It means that $P'\Omega^{-1} \in l^2$ for $P' = [b_1, b_1, ..]$ that would be classified in two lines l^2. This implies $q_t^{\infty} = P'\Omega^{-1}z_{t,\infty}$ which exists almost certainly, is stationary and has two final points.

It imposes additional conditions for Ω and Ω^{-1}.

Let $\omega_{i,j}$ the element i, j of Ω and be $v_{i,j}$ element i, j of Ω^{-1}. Assuming that $\omega_{i,j} = g_\omega(i-j) + o(\lambda_\omega^{|i-j|})$ and $v_{i,j} = g_v(i-j) + o\left(\lambda_v^{|i-j|}\right)$ for constant values $\lambda_\omega, \lambda_v \epsilon (0,1)$ and functions g_ω and g_v so that $g.(M) = O(\lambda^M)$.

The condition imposes exponential rate of decay for items that are not on the diagonal Ω and Ω^{-1}. These rates are satisfied for ARMA and GARCH models.

satisfăcute pentru modele liniare de tip ARMA, dar şi pentru procese de tip GARCH.

Presupunând condiţiile anterioare îndeplinite, fie

Assuming that the previous conditions are fulfilled, let

$$\Gamma_{t-s}^{ux} = Eu_t x_s, \Gamma_{t-s}^{yy} = cov(y_t, y_s) \text{ şi fie } A_2 = lim_n \frac{\sqrt{n}}{MEd_7},$$

putem defini A_1 în funcție de A_2 , conform formulei:

we can define A_1 according to A_2 , using the formula:

$$A_1 = A_2 + \lim_{M\to\infty} M^{-1} \sum_{j_1,j_2=1}^{M} \sum_{j_3=-\infty}^{\infty} v_{j_1,j_2} \Gamma_{j_3}^{yy} \Gamma_{-j_1+j_2-j_3}^{ux}$$

Dacă/ If $A = tr(D^{-\frac{1}{2}} A_1' A_1 D^{-\frac{1}{2}})$ şi $\sigma_M = tr(D^{-\frac{1}{2}} P_M' \Omega_M^{-1} P_M D^{-\frac{1}{2}})$, atunci pentru/ than for M, $M \to \infty, \frac{n}{M^2(\sigma_M - p)} \to B_1/k \; cu \; 0 < k < \infty \; si \; 0 < B_1 < \infty$

$$\lim_n n/M_{\varphi_n}^2(M) = A + B_1/k$$

Aceasta arată că termenul cu înclinație (bias) A_1 are o formă complexă.

Presupunând condițiile îndeplinite, dacă $M/\sqrt{n} \to 0$, atunci

This shows that the bias term A_1 has a complex form.

Assuming that the conditions were fulfilled, if $M/\sqrt{n} \to 0$, then

$$\lim_n \sqrt{n}/ MEb_{n,M}^{+} = A_2$$

și/ and

$$\lim_n \frac{n}{M_{\varphi_n}^2(M)} = B_1/k$$

Rezultatul este semnificativ, deoarece arată că alternativa formulării estimatorului GMM îndepărtează cu succes cel mai mare termen de înclinație (bias) şi poate fi văzut ca o alternativă a metodelor de corecție dezvoltate de Kuersteiner.

4. Concluzii

Am determinat o analiză asimptotică de ordin superior a estimatorilor modelelor ARMA cu parametrii autoregresivi, atunci când inovațiile sunt diferențe martingale generale, secvențiale. Estimatorii de variabile instrumenttale sunt folosiți frecvent în astfel de modele.

Eficiența asimptotică de ordinul întâi

The result is significant because it shows that the alternative formulation of GMM estimator successfully removes the largest bias term and can be seen as an alternative correction to methods developed by Kuersteiner.

4. Conclusions

We determined higher order asymptotic analysis estimators for ARMA models with autoregressive parameters when innovations are general martingale differences, sequential. Instrumental variables estimators are commonly used in such models

First order asymptotic efficiency requires that the number of tools to tend to infinity. In cere ca numărul de instrumente să tindă la infinit. În practică însă, această regulă nu se poate aplica şi din cauza limitării mărimii eșantionului.

practice, this rule cannot be applied due to sample size limitation.

Bibliografie selectivă/Selective bibliography:

1. ANDREWS, D.W.K., SHI, X. (2011). *Nonparametric Inference Based on Conditional Moment Inequalities*, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University in Cowles Foundation Discussion Papers with number 1840.
2. ANGHELACHE, C. (2016). *Econometrie teoretică*, Editura Artifex, Bucureşti.
3. ANGHELACHE, C., ANGHEL, M.G., MANOLE, A. (2014). *Modelare economică, financiar-monetară şi informatică,* Editura Artifex, Bucureşti.
4. ANGHELACHE, C. (2008). *Tratat de statistică teoretică şi economică*, Editura Economică, Bucureşti.
5. ARMSTRONG, T.B. (2014). *On the Choice of Test Statistic for Conditional Moment Inequalities*, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University in Cowles Foundation Discussion Papers with number 1960.
6. CHERNOZHUKOV, T. et. al. (2012). *Intersection bounds: estimation and inference*, Centre for Microdata Methods and Practice, Institute for Fiscal Studies in CeMMAP working papers with number CWP33/12.
7. CHRISTOFFERSEN, P. et.al. (2012). *GARCH Option Valuation: Theory and Evidence*, Department of Economics and Business Economics, Aarhus University in CREATES Research Papers with number 2012-50.
8. CIZEK, P., AQUARO, M. (2015). *Robust Estimation and Moment Selection in Dynamic Fixed-effects Panel Data Models*, Tilburg University, Center for Economic Research in Discussion Paper with number 2015-002.
9. DITRAGLIA, F.J. (2011). *Using Invalid Instruments on Purpose: Focused Moment Selection and Averaging for GMM*, Penn Institute for Economic Research, Department of Economics, University of Pennsylvania in PIER Working Paper Archive with number 14-037.
10. *FRANCQ, C., WINTENBERGER, O., ZAKOIAN, J.-M. (2012). Garch models without positivity constraints: exponential or log garch?, University Library of Munich, Germany in MPRA Paper with number 41373.*
11. GÓRKA, J. (2014). *Option Pricing under Sign RCA-GARCH Models*, Dynamic Econometric Models, Volume (Year): 14 (2014), pp. 145-160.
12. VEIGA, H. et.al. (2015). *Model uncertainty and the forecast accuracy of ARMA models: A survey*, Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Estadística in DES - Working Papers. Statistics and Econometrics. WS with number ws1508.