SECŢIUNEA III: INFORMATICĂ, CIBERNETICĂ ŞI STATISTICĂ ECONOMICĂ

ALGORITM DE SOLUŢIONARE A PROBLEMEI ECHILIBRATE A TRANSPORTURILOR ÎN CAZUL DECIZIONAL SAVAGE

Lilian GOLBAN, *Drd.*
Academia de Studii Economice a Moldovei,
Republica Moldova, Chişinău, Bănulescu Bodoni, 61,
tel. (+373) 22 41 28, www.ase.md
Email: golban.lilian@gmail.com

Abstract
The balanced transportation problem consists in the establishment of the optimal distribution plan of goods to the markets where they are demanded. The purpose of this article is to present a new model of decision-making, the "minimal regret", which brings a new approach to solving this class of problems, based on the principles described by Savage, when the manifestation of uncontrollable factors cannot be expected.

Keywords*: decision criteria, function of regrets, states of nature, tolerance threshold, uncertainty.*

JEL CLASSIFICATION: C02, C61.

Problema echilibrată de transport constă în stabilirea unui plan optim de distribuţie a unor produse, aflate în posesia furnizorilor, către pieţele de desfacere, cu condiţia că cantitatea oferită este echivalentă cu cea solicitată de către consumatori. Formularea clasică a unei astfel de probleme constă în următoarele. Se admite că m furnizori $A_1, ..., A_i, ..., A_m$ deţin un produs omogen în cantităţile $a_1, ..., a_i, ..., a_m$, ce necesită a fi livrate spre n centre de consum $B_1, ..., B_j, ..., B_n$ în cantităţile $b_1, ..., b_j, ..., b_n$. În această situaţie se cunoaşte costul de transport al unei unităţi de produs C_{ij} de la furnizori la consumatori[1].

Fie: x_{ij} – cantitatea de produs care urmează a fie transportată;

ω – factorul aleatoriu sau „starea naturii” care s-ar putea manifesta.

Se consideră o situaţie decizională pentru problema de transport , exprimată în forma:

$$Z(x,\omega) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\omega)\cdot x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{i,}\ \ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_{j,}\ \ j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (4)$$

$$\omega \in \Omega = \{\omega^1, \omega^2, ..., \omega^r\} \qquad (5)$$

Având la bază conceptul criteriului Savage[2,3,4,5], modelul considerat este:

$$Z_S(x) = \max_{\omega^k \in \Omega}\left(Z(x,\omega) - Z^*(\omega^k)\right) \to \min \tag{6}$$

Se consideră r probleme de forma:

$$Z^*(\omega^k) = \min_x Z(x,\omega^k) = \min_x \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\omega^k)\cdot x_{ij} \tag{7}$$

cu condiţiile (2)-(5), $k = 1,2,...,r$.

Fie $Z^*{}_k = \min Z(x,\omega^k)$, iar $Z(x,\omega^k) - Z^*{}_k$ – valoarea regretului dacă starea naturii $\omega = \omega^k$. Atunci: $Z_S(x) = \max_{1\le k\le r}\left(Z(x,\omega^k) - Z^*{}_k\right)$ – valoarea minimală a regretului în condiţia că planul de transport este reprezentat de setul $x = \{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

În continuare urmează de determinat varianta x_S^*:

$$Z_S(x_S^*) = \min_{x\in D} Z_S(x) \tag{8}$$

Se definesc următoarele funcţii:

$$\Phi_i(x_{i1},...,x_{in}) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i,\ i = \overline{1,m}; \tag{9}$$

$$\Psi_j(x_{1j},...,x_{mj}) = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij},\ j = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Este evident, dacă x - soluţie admisibilă $\Rightarrow \Phi_i(\bullet)\ \le 0,\ \forall\ i = \overline{1,m}$ şi $\Psi_j(\bullet)\ \le 0,\ \forall\ j = \overline{1,n}$.

Pentru început, se determină o soluţie de start $x^0 = \left\{x_{ij}^0\right\} : x_{ij}^0 \ge 0$.

Fie că este considerată mulţimea $X = \left\{x = \{x_{ij}\},\ i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n}\ \ :\ \ x_{ij} \ge 0\ \right\}$.

Se defineşte următorul proces iterativ, care constă în determinarea succesivă a ***matricelor*** $x^0,\ x^1,\ x^2,\ ...,\ x^s,\ x^{s+1},\ ...$ aplicând metoda gradientului generalizat într-o formă modificată[6] şi adaptată structurilor de date utilizate. Aici, $x^s = \{x_{ij}^s\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ - varianta de decizie care corespunde iteraţiei ‘**s**’.

Următoarea ***matrice*** x^{s+1} se calculează ca proiecţia:

$$x^{s+1} = \prod\nolimits_X (x^s - \rho_s \cdot g^s)\ ,\ \ \text{unde} \tag{11}$$

$g^s = \left\{g_{ij}^s\right\}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$ - determină direcţia deplasării la pasul ‘s+1’;

Există modele în care, în particular, pentru situaţia echilibrată a problemei de transport, algoritmul de soluţionare nu va ajunge la situaţia $\Phi_i\ (\bullet) \le 0,\ i = \overline{1,m}$, şi $\Psi_j\ (\bullet) \le 0,\ j = \overline{1,n}$. În acest caz, constrângerile sunt mult prea “dure” pentru a putea fi îndeplinite. Dificultatea soluţionării problemei iniţiale presupune introducerea unui “prag de toleranţă”[7], în raport cu restricţiile (2,3), care ar permite soluţionarea problemei (6,7)-(2-5) cu o anumită precizie, suficient de mică şi neglijabilă din punct de vedere practic.

În continuare, cu $\varepsilon_s > 0$ se va nota mărimea „prag de toleranţă” corespunzător iteraţiei s.

Astfel, algoritmul de soluţionare are următoarea formă:

$|1\rangle$ Fie că toate funcţiile $\Phi_i\ (\bullet) \le \varepsilon_s$ şi $\Psi_j\ (\bullet) \le \varepsilon_s$ în cazul $x = x^s$, atunci $g_{ij}^s = C_{ij}^s$ iar $C^s : Z_S(x^s) = \max_{1\le k\le r}\left(Z(x^s,\omega^k) - Z_k^*\right)$. În acest caz $Z(x^s,\omega^k) = \sum_i\sum_j C_{ij}(\omega^k)\cdot x_{ij}^s$;

$|2\rangle$ Fie că $\Phi_{i1}(\bullet) > \varepsilon_s$, $\Phi_{i2}(\bullet) > \varepsilon_s$, …, $\Phi_{il}(\bullet) > \varepsilon_s$ şi/sau $\Psi_{j1}(\bullet) > \varepsilon_s$, $\Psi_{j2}(\bullet) > \varepsilon_s$, …, $\Psi_{jt}(\bullet) > \varepsilon_s$; $1 \le l \le m$; $1 \le t \le n$ unde $i_1, i_2, ..., i_l$ reprezintă indicii acelor funcţii Φ_i, $i = \overline{1,m}$, pentru care $\Phi_i\ (\bullet) > 0$. Respectiv $j_1, j_2, ..., j_t$ - indicii funcţiilor Ψ_j, $j = \overline{1,n}$, pentru care $\Psi_j\ (\bullet) > 0$.

- Dacă $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ x_{i2}^s,\ ...,\ x_{in}^s) > \varepsilon_s$, atunci $g_{ij}^s = 1$.
- Dacă $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ x_{i2}^s,\ ...,\ x_{in}^s) \le \varepsilon_s$, atunci $g_{ij}^s = 0$.
- Dacă $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ x_{j2}^s,\ ...,\ x_{jm}^s) > \varepsilon_s$, atunci $g_{ij}^s = -1$.
- Dacă $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ x_{j2}^s,\ ...,\ x_{jm}^s) \le \varepsilon_s$, atunci $g_{ij}^s = 0$.
- Dacă $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ x_{i2}^s,\ ...,\ x_{in}^s) > \varepsilon_s$ şi $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ x_{j2}^s,\ ...,\ x_{jm}^s) > \varepsilon_s$, atunci $g_{ij}^s = \begin{Bmatrix} 1, & if \quad \Phi_i(\bullet) \ge \Psi_j(\bullet) \\ -1, & if \quad \Phi_i(\bullet) < \Psi_j(\bullet) \end{Bmatrix}$.

Pentru realizarea schemei prezentate cu aplicarea „pragului de toleranţă”, este necesar ca şirurile numerice $\{\rho_s\}$ şi $\{\varepsilon_s\}$ să respecte următoarele condiţii [7]:

$$\rho_s \ge 0,\ \rho_s \to 0,\ \varepsilon_s > 0,\ \varepsilon_s \to 0,\ \rho_s/\varepsilon_s \to 0,\ \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \varepsilon_s = \infty. \tag{12}$$

De exemplu, dacă $\rho_s = \dfrac{1}{(s+1)^{\alpha}}$, $\varepsilon_s = \dfrac{1}{(s+1)^{\beta}}$, $\alpha - \beta > 0,\ \alpha + \beta \le 1,\ \alpha = \dfrac{1}{4},\ \beta = \dfrac{3}{4}$, toate condiţiile indicate mai sus se respectă.

Studiu experimental. Fie că este considerată următoarea problemă:

- Mulţimea factorilor necontrolabili este formată din două stări ale naturii: $\omega \in \{\omega^1, \omega^2\},\ r = 2$.
- Pentru $n = 4$ şi $m = 3$, tabelele problemelor echilibrate de transport sunt prezentate în Tabelul 1 (pentru ω^1) şi Tabelul 2 (pentru ω^2).

Tabel 1. Tabelul problemei echilibrate de transport pentru ω^1

Depozitele	**Pieţele de desfacere**				**Volumul ofertei** (u.c.)
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	x_{11} 2	x_{12} 4	x_{13} 3	x_{14} 6	100
A2	x_{21} 5	x_{22} 7	x_{23} 10	x_{24} 4	250
A3	x_{31} 7	x_{32} 5	x_{33} 8	x_{34} 6	150
Volumul cererii (u.c.)	70	180	100	150	500

Tabel 2. Tabelul problemei echilibrate de transport pentru ω^2

Depozitele	**Pieţele de desfacere**				**Volumul ofertei** (u.c.)
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	x_{11} 6	x_{12} 3	x_{13} 4	x_{14} 2	100
A2	x_{21} 4	x_{22} 10	x_{23} 7	x_{24} 5	250
A3	x_{31} 6	x_{32} 8	x_{33} 5	x_{34} 7	150
Volumul cererii (u.c.)	70	180	100	150	500

Costul total de transport al produselor de la furnizor la punctele de consum este:

- pentru ω^1: $$\begin{aligned} Z_1(x,\omega^1) = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} + 4x_{24} + \\ + 7x_{31} + 5x_{32} + 8x_{33} + 6x_{34} \ \to \min \end{aligned};$$

- pentru ω^2: $$\begin{aligned} Z_2(x,\omega^2) = 6x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 10x_{22} + 7x_{23} + 5x_{24} + \\ + 6x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} + 7x_{34} \ \to \ \min \end{aligned}.$$

Sistemul de restricţii $\Phi_i\ (\bullet) \le \varepsilon_s$ şi $\Psi_j\ (\bullet) \le \varepsilon_s$ este evident.

Evident, dacă valorile tuturor funcţiilor Φ_i şi Ψ_j sunt mai mici sau egale cu $\tilde{\varepsilon}$ pentru mulţimea $\{x_{ij}\}$, atunci această soluţie este şi $\tilde{\varepsilon}$ - admisibilă şi viceversa.

Respectând condiţiile din (12), se va considera următoarele: $\rho_s = \dfrac{10}{(s+1)^{\alpha}}$; $\tilde{\varepsilon}_s = \dfrac{0,5}{(s+1)^{\beta}}$.

În particular, $\alpha = 1/2$; $\beta = 1/4$ $\rightarrow$ $\rho_s = \dfrac{10}{(s+1)^{1/2}}$; $\tilde{\varepsilon}_s = \dfrac{0,5}{(s+1)^{1/4}}$.

Planul optim de transport, determinat separat pentru fiecare stare a naturii, este:

– pentru ω^1: $x^{1*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 70 & 30 & 0 & 150 \\ 0 & 150 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $Z_1^*(x^{1*}, \omega^1) = 2210$.

– pentru ω^2: $x^{2*} = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 70 & 30 & 0 & 150 \\ 0 & 50 & 100 & 0 \end{bmatrix}$; $Z_2^*(x^{2*}, \omega^2) = 2570$.

Pentru a soluţiona problema de mai sus, aplicând criteriul Savage cu implicarea “pragului de toleranţă”, a fost realizată o aplicaţie software care realizează toate calculele de rigoare. Considerând că se efectuează $s_{\max} = 1\ 400\ 000$ iteraţii, varianta optimă calculată este:

$$x_S^* = \begin{bmatrix} 0,0084516180 & 50,0035440230 & 49,9857071561 & 0,0000000242 \\ 69,9734861898 & 26,8097130770 & 3,2327476200 & 149,9609068468 \\ 0,0169032722 & 103,1733429265 & 46,7712041972 & 0,0253549446 \end{bmatrix}.$$

Pentru $x_S^*(s = 1\ 399\ 982)$, funcţiile scop sunt evaluate la:

– pentru ω^1: $Z_{1S}^*(x_S^*, \omega^1) = 2410,0015277998$;

– pentru ω^2: $Z_{2S}^*(x_S^*, \omega^2) = 2729,9506821964$.

Trebuie de remarcat că, în pofida faptului că funcţiile scop $Z_{rS}^*(x_S^*, \omega^r)$ au valori diferite, regretul, pentru fiecare dintre ele, este aproximativ egal, cu o mica diferenţă, care, din punct de vedere practic, poate fi neglijată. În acelaşi timp, acest regret este şi minim posibil:

– $Z_{1S}^*(x_S^*, \omega^1) - Z_1^*(x^{1*}, \omega^1) = 200,0015277998$ şi

– $Z_{2S}^*(x_S^*, \omega^2) - Z_2^*(x^{2*}, \omega^2) = 199,9506821964$.

CONCLUZII

Din studiul experimental prezentat reiese, că algoritmul propus poate fi implementat cu succes la soluţionarea clasei de probleme menţionate. Indiferent de faptul, ce stare a naturii se va realiza, decidentul va suporta regretul minimal. Utilizarea „pragului de toleranţă”, care se micşorează de la pas la pas, permite soluţionarea problemei cu orice precizie.

BIBLIOGRAFIE:

1. Andrei Gameţchi, Dumitru Solomon. *Cercetări operaţionale*, *Volumul I*. Chişinău, Evrica, 2015, pag. 209-216;
2. Hamdy A. Taha. *Operations research an introduction*, 3rd edition. London 1982;
3. Savage L. J. *The theory of statistical decision*. J. Amer. Statist. Assoc., 1951, vol. 46, pp. 55-67;
4. Anatol Godonoagă, Lilian Golban. *Modification of the Savage's decision criterion for continuous processes*. The 4th Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997), 28 June – 2 July 2017, Chisinau, Moldova, pp. 389 – 392;
5. Годонога А. Ф., Голбан Л. Л., Чумаков Б. М., *“Некоторые модели принятия решений в условиях неопределености”*, Теория оптимальных решений, Национальная академия наук Украины, Институт кибернетики имени В. М. Глушкова, Киев 2018, pp. 130-137;
6. [Шор Н. З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения*, Киев, „Наукова Думка”, 1979;
7. [Anatol Godonoagă, Anatolie Baractari. *Modele economice nediferenţiabile. Aspecte decizionale*. Editura ASEM, Chişinău 2011, pp. 41-100.