DOI: https://doi.org/10.53486/sstc.v3.31
CZU: 519.852

THE SIMPLEX METHOD – EFFICIENT WAY OF FINDING THE OPTIMAL SOLUTION TO THE LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

METODA SIMPLEX – MOD EFICIENT DE GĂSIREA SOLUȚIEI OPTIME PENTRU PROBLEMA DE PROGRAMARE LINIARĂ

COSTEȚCHI Milina, studentă, Specialitatea: CON
Academia de Studii Economice din Moldova,
Republica Moldova, Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61, www.ase.md
e-mail autor: milinacost2004@gmail.com

Abstract. *In the real world, in most cases, such as industry, management, and even in daily life, we encounter optimization and decision-making problems that require the opinions of experts and masters on the problem to be able to make the best decision. For this purpose, the simplex method is the efficient way of solving the introduced optimization problems. A feature of the simplex optimization method is the combination of studying the response surface with moving along it to the extremum. The simplex method has a number of positive qualities that allow it to be used in production conditions to solve optimization problems. The article presents the results of the implementation in the laboratory practical simplex method for the determination of the response function extremum at finding optimal experimental conditions.*

Key Words: *Linear programming, simplex method, simplex algorithm, optimal solution, basic solution.*

JEL CLASSIFICATION: C1, C4

INTRODUCERE

Din punct de vedere economic, existenţa mai multor soluţii optime are o importanţă deosebită. Într-adevăr, dacă obiectivul problemei de programare liniară este stabilirea unui plan optim de producţie şi după rezolvare am obţinut mai multe soluţii optime, atunci putem alege una dintre ele, astfel încât planul ales să satisfacă şi alte cerinţe, care nu au fost incluse în condiţiile iniţiale. În general, problema programării economice este o problemă complexă și vastă, pentru rezolvarea cărora matematica oferă diverse metode din multitudinea de ramuri, ca: aritmetica, algebra, geometria, analiza matematică, calculul probabilităților, ecuații diferențiale, ecuații integrale, etc. Scopul acestui articol este de a prezenta noțiunile fundamentale legate de programare matematică cu accent pe programare liniară și de a descrie succint metoda simplex de rezolvarea PPL.

CONȚINUTUL DE BAZĂ

Progamarea liniară, ca disciplină matematică, a apărut la mijlocul secolului XX, primele lucrări fiind publicate de L. Kantorovici (1939) şi F. Hitchcock (1941). Primele probleme rezolvate se refereau la organizarea optimă a transporturilor maritime, necesităţile de aprovizionare a frontului și planificarea misiunilor aviaţiei de bombardament.

Problemele de programare liniară sunt inventate pentru determinarea valorii maxime sau minime a unei funcții liniare, în care mai multe variabile de optimizare sunt supuse unor restricţii. În alte cuvinte, o problemă de programare matematică constă în maximizarea sau minimizarea unei funcţii ale cărei variabile trebuie să satisfacă unui set de egalităţi şi/sau inegalităţi.

ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

Probleme de maxim și de minim apar frecvent în cele mai diferite domenii ale matematicii, de exemplu, în domeniul economic, unde ele se ocupă cu maximizarea profiturilor și minimizarea costurilor. La fel, problemele de programare liniară sunt folosite pentru rezolvarea sarcinilor în cadrul domeniilor de inginerie, agricultură, marketing, finanțe (investiții), publicitate, etc.

Metoda Simplex, numită şi algoritm simplex, a fost propusa de George Bernard Dantzig în 1947. Este una dintre cele mai populare metode de rezolvare a problemelor de programare liniară. Denumirea provine de la noţiunea de simplex şi a fost sugerată de T.S. Motzkin. Revista ,,Computing in Science and Engineering" (vol. 2, nr. 1, 2000) a inclus algoritmul în primii 10 algoritmi de top ai secolului XX.

Metoda simplex este o procedură iterativă de rezolvare a problemelor de programare liniară aduse la forma tabelară. Atunci când nu se mai poate aduce nici o îmbunătăţire a fost atinsă ***soluţia optimă***. Metoda se aplică asupra problemei în forma standard, ceea ce, potrivit teoremei despre echivalenţa formelor, nu afectează universalitatea metodei.

Cum am menționat anterior, metoda se aplică asupra problemei în forma standard, de aceea transformarea unui program liniar din forma canonică, în cea standard poate fi realizată după cum urmează, de exemplu, având în vedere constrângerea:

$x \geq 5$, o nouă variabilă, y se introduce cu: $y=x-5$, astfel, **$x=y+5$**.

Algoritmul metodei Simplex pentru rezolvarea problemelor de programare liniară:

1) Considerăm o problemă de programare liniară sub forma canonică, cu ajutorul variabilelor de compensare scriem modelul matematic al problemei sub forma standard.

2) Completăm tabelul simplex iniţial. În prima coloană a tabelului sunt trecute necunoscutele de bază. În coloana a doua sunt scrişi coeficienţii funcţiei obiectiv de pe lângă necunoscutele de bază. În prima linie Δ_j se coboară toate cifrele c cu semne opuse, iar sub b avem 0. Mai departe calculăm prin metoda dreptunghiului.

Tabelul 1. Tabelul Simplex

Baza	i	B	c_1	...	c_s	...	c_n	0	...	0
			x_1	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}
x_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1	...	0
x_{n+2}	0	b_2	a_{21}	...	a_{2s}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+r}	0	b_r	a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	...	1
$\Delta_j=z_j+c_j$		0	$-c_1$	...	$-c_s$	...	$-c_n$	0	...	0

Sursa: *Elaborat de autor*

3) Se analizează valorile Δ_j:

➢ Dacă avem *problema de minim* avem condițiile:

• Dacă toate elementele Δ_j sunt mai mici sau egali ca 0, atunci este soluția optimă;

• Dacă în linia Δ_j avem cel puțin un element mai mare sau egal ca 0, atunci în aceasta linie alegem cel mai mare element Δ_j și în coloana lui alegem pivotul, în linia în care se obține cel mai mic raport dintre b_i și a_{ij}.

➢ Dacă avem *problema de maxim* avem condițiile:

• Dacă în linia Δ_j avem cel puțin un element mai mic sau egal ca 0, atunci în aceasta linie alegem cel mai mic element Δ_j și în coloana lui alegem pivotul, în linia în care se obține cel mai mic raport dintre b_i și a_{ij};

ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

- Dacă toate elementele Δ_j sunt mai mari sau egali ca 0, atunci este soluția optimă.

4) Alegem pivotul și lucrăm cu metoda Jordan-Gauss, până ce nu avem soluție de optim

Atunci când o problemă este scrisă direct în forma standard ea poate să nu corespundă şi formei tabelare, pentru acele ecuaţii, se adaugă o variabilă artificială căreia i se asociază coeficientul -M, unde **M** este gândit ca ***un număr foarte mare apropiat de infinit***.

Exemple de probleme de programare liniară, rezolvate prin metoda Simplex.

I.Rezolvarea manuală

$\mathbf{z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow MAX}$
$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 \leq 30}$
$\mathbf{2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60}$
$\mathbf{x_1 - x_2 + 2x_3 = 20}$
$\mathbf{x_j \geq 0, j=1,2,3}$

a) Pentru a aduce problema la forma standard se introduc variabilele de compensare s_1 şi s_2.

$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow MAX$
$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 = 60$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$
$x_j \geq 0, j=1,2,3$

b) Pentru a aduce problema la forma tabelară se adaugă variabilele artificiale a_1 şi a_2. Funcţia obiectiv va fi şi ea modificată prin adăugarea noilor variabile multiplicate cu coeficientul –M.

Tabelul 2. Iterația a I-a

Baza	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	
		2	3	4	0	0	-M	-M	
s_1	0	1	1	1	1	0	0	0	30
a_1	-M	2	1	3	0	-1	1	0	60
$\mathbf{a_2}$	-M	1	-1	**2**	0	0	0	1	20
	z_j	-3M	0	-5M	0	M	-M	-M	-80M
	c_j-z_j	3M+2	3	5M+4	0	-M	0	0	

Sursa: *Elaborat de autor în baza datelor exemplului I*

Tabelul 3. Iterația a II-a

Baza	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	
		2	3	4	0	0	-M	
s_1	0	½	3/2	0	1	0	0	20
$\mathbf{a_1}$	-M	½	**5/2**	0	0	-1	1	30
x3	4	½	-1/2	1	0	0	0	10
	z_j	-(1/2)M+2	-(5/2)M-2	4	0	M	-M	-30M+40
	c_j-z_j	(1/2)M+2	(5/2)M+5	0	0	-M	0	

Sursa: *Elaborat de autor în baza datelor exemplului I*

Tabelul 4. Iterația a III-a

Baza	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
		2	3	4	0	0	
$\mathbf{s_1}$	0	1/5	0	0	1	**15/4**	11
x_2	3	1/5	1	0	0	-2/5	6
x3	4	3/5	0	1	0	-1/5	13

ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

	z_j	3	3	4	0	-2	-30M+40
	c_j-z_j	-1	0	0	0	2	

Sursa: *Elaborat de autor în baza datelor exemplului I*

Tabelul 5. Iterația a IV-a

Baza	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
		2	3	4	0	0	
s_2	0	1/3	0	0	5/3	1	55/3
x_2	3	1/3	1	0	2/3	0	40/3
x3	4	2/3	0	1	1/3	0	50/3
	z_j	11/3	3	4	10/3	0	320/3
	c_j-z_j	-5/3	0	0	-10/3	0	

Sursa: *Elaborat de autor în baza datelor exemplului I*

Astfel **soluția optimă** este **x_1=0**, **x_2=40/3**, **x_3=50/3**, **s_1=0**, **s_2=55/3**, iar **valoarea optimă** este **z=320/3**.

II.Rezolvarea cu ajutorul programului „ Calculator metoda simplex”

$z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow MIN$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$

$- x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_2 + x_4 = 10$

$x_j \geq 0, j=1,2,3,4$

Tabelul 6. Exemplul PPL rezolvat prin program

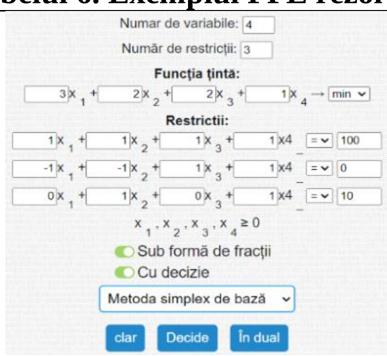
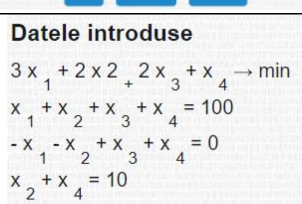


Figura 1. Calculator metoda Simplex

Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method



Datele introduse

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow min$

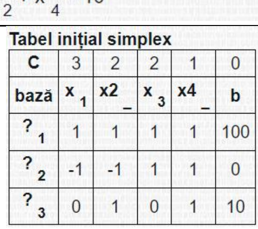
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$

$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_2 + x_4 = 10$

Figura 2. Calculator metoda Simplex. Datele introduse

Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method

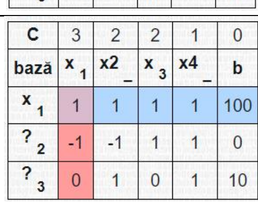


Tabel inițial simplex

C	3	2	2	1	0
bază	x_1	x2	x_3	x4	b
$?_1$	1	1	1	1	100
$?_2$	-1	-1	1	1	0
$?_3$	0	1	0	1	10

Figura 3. Calculator metoda Simplex. Tabel inițial Simplex

Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method



C	3	2	2	1	0
bază	x_1	x2	x_3	x4	b
x_1	1	1	1	1	100
$?_2$	-1	-1	1	1	0
$?_3$	0	1	0	1	10

Figura 4. Calculator metoda Simplex

Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method

ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

C	3	2	2	1	0
bază	x_1	$x2$	x_3	$x4$	b
x_1	1	1	1	1	100
x_3	0	0	2	2	100
$?_3$	0	1	0	1	10

Figura 5. Calculator metoda Simplex
Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method

C	3	2	2	1	0
bază	x_1	$x2$	x_3	$x4$	b
x_1	1	1	0	0	50
x_3	0	0	1	1	50
$x2$	0	1	0	1	10

Figura 6. Calculator metoda Simplex
Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method

C	3	2	2	1	0
bază	x_1	$x2$	x_3	$x4$	b
x_1	1	0	0	-1	40
x_3	0	0	1	1	50
$x2$	0	1	0	1	10
Δ	0	0	0	0	240

Figura 7. Calculator metoda Simplex
Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method

Răspuns
$x_1 = 40, x_2 = 10, x_3 = 50, x_4 = 0, F = 240$

Figura 8. Calculator metoda Simplex. Răspuns
Sursa: https://programforyou.ru/calculators/simplex-method

Sursa: *Elaborat de autor în baza datelor exemplului II*

CONCLUZII/RECOMANDĂRI

Deci, analizând toate expuse de mai sus, putem concluziona că în economie metoda simplex joacă un rol principal, deoarece contabil, economist, angajat bancar sau antreprenor, zilnic se confruntă cu probleme și dificultăți, de aceea regulile simplex pot ajuta la găsirea rapidă a soluției optime și comune. După exemplele rezolvate, la fel putem observa că metoda simplex este foarte eficientă și poate determina soluția optimă, indiferent de situația abordată, fie aceasta din domeniul matematic și economic.

Referindu-ne la eficacitatea practică a algoritmului simplex, după o jumătate de veac de experimente numerice şi perfecţionări teoretice, se poate spune că acesta s-a dovedit a fi o procedură foarte robustă fiind capabilă să rezolve programe liniare de dimensiuni impresionante conţinînd sute de restricţii şi mii de variabile. Este de la sine înţeles că aceste performanţe n-ar fi fost posibile fără utilizarea unor calculatoare din ce în ce mai puternice și performante, astfel de calculatoare electronice putem observa în articol, ele fiind un mod eficient de rezolvarea rapidă a problemelor de programare liniare.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE:

1. Vasile Teodor NICA, *CERCETĂRI OPERAŢIONALE I. Introducere în Cercetarea Operaţională. Elemente de Programare Liniară. Analiza Drumului Critic. Introducere în Programarea Neliniară. Note de curs pentru învăţământul la distanţă*, Editura ASE, Bucureşti, 2011 Vol. I, p. 34-81, ISBN: 978-606-505-500-1 978-606-505-502-5 (PDF). Disponibil: http://www.asecib.ase.ro/Nica/ID/ID_Cercetari_operationale_I.pdf
2. ZAMBIȚCHI Dumitru, ZAMBIȚCHI Mircea, *Matematici aplicate în economie. Algebra liniară. Programarea liniară,* Editură: Chişinău Evrica, 2005, Format: 204 p., Identificator: ISBN9975-942-92-X.

Coordonator științific: TACU Mariana, lect. sup. univ.
Academia de Studii Economice din Moldova,
Republica Moldova, Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61, www.ase.md
e-mail: tacu.mariana@ase.md