NORMALITATEA ASIMPTOTICĂ PENTRU ESTIMATORII ECUAȚIEI SINGULARE ÎN CAZUL UNEI POPULAȚII CU INSTRUMENTE SENSIBILE

Prof. univ. dr. Constantin ANGHELACHE,
Academia de Studii Economice, București
Universitatea „Artifex” din București
Prof. univ. dr. Alexandru MANOLE,
Universitatea „Artifex” din București
Conf. univ. dr. Mădălina-Gabriela ANGHEL,
Universitatea „Artifex” din București

În acest articol, autorii analizează normalitatea asimptotică pentru estimarea ecuației singulare. Cazul studiat acoperă populația cu instrumente sensibile. Modelele și ipotezele relevante sunt expuse și explicate, iar corelațiile semnificative extrase din ecuații sunt evidențiate.

Cuvinte-cheie: *normalitate, populație, estimatori, ecuație, creștere.*

JEL: D16; C01; C1.

1. Scurte noţiuni introductive

În această lucrare, am încercat să analizăm efectele extinderii rezultatelor în cazul normalităţii asimptotice pentru estimatorii obţinuţi atunci când utilizăm populaţii cu instrumente sensibile. Vom studia situaţia în care un parametru nu are creştere mai redusă, astfel ca $\frac{\sqrt{K_n}}{r_n}$ să tindă către infinit.

ASYMPTOTIC NORMALITY FOR SINGLE EQUATION ESTIMATORS FOR A POPULATION WITH SENSITIVE INSTRUMENTS

Professor, PhD Constantin ANGHELACHE,
Bucharest University of Economic Studies
“Artifex” University of Bucharest
Professor, PhD Alexandru MANOLE,
“Artifex” University of Bucharest
Assoc. Prof., PhD Mădălina-Gabriela ANGHEL,
“Artifex” University of Bucharest

In this paper, the authors analyse the asymptotic normality for the estimation of singular equation. The case considered covers the population with sensitive instruments. The relevant models and hypotheses are exposed and explained; also the significant correlations revealed by the equations are emphasized.

Key words: *normality, population, bias, equation, growth.*

JEL: D16; C01; C1.

1. Short introductory notions

In this paper we have tried to analyse the effects of results extension in the case of asymptotic normality for estimators achieved when we use population with sensitive instruments. We shall study the situation in which a parameter does not record lower increase, so $\frac{\sqrt{K_n}}{r_n}$ would tend to infinite.

2. Consideraţii privind modelul cu ecuaţii simultane[1]

Se va analiza modelul cu două ecuații simultane (SEM), de forma:

2. Considerations on simultaneous equations model[1]

In the demonstration we shall consider two simultaneous equations model (SEM):

$$y_{1n} = y_{2n}\beta + X_n\gamma + u_{n,} \quad (1)$$

$$y_{2n} = Z_n\pi + X_n\varphi + v_n, \quad (2)$$

unde, y_{1n} si y_{2n} sunt vectorii n × ai observațiilor celor două variabile endogene ale sistemului. La rândul său, X_n este o matrice $n\ x\ J$ a observațiilor variabilelor exogene J, incluse în ecuația (1), iar

Z_n este o matrice $n \times x\ K_n$ a observațiilor asupra variabilelor instrumentale K_n, sau a variabilelor exogene excluse din ecuația (1).

La rândul lor u_n si v_n sunt $n \times 1$ vectori ai perturbanței aleatorice.

Vom considera $\eta_i = (u_i, v_i)'$, unde u_i și v_i sunt componente ale vectorilor aleatorii $u_{n,}$, respectiv v_n.

Pentru situaţia prezentată vom emite următoarele ipoteze.

- Presupunem că $\pi = \pi_n = \frac{c_n}{b_n}$ pentru unele secvențe de numere pozitive secvențiale $\{b_n\}$, nedescrescătoare în n, și pentru unele secvențe non-aleatorii, $K_n\ x \times 1$parametrul vectorilor $\{c_n\}$.
- A doua presupunere (ipoteză) porneşte de la faptul că $\{\bar{Z}_{i,n}: i = 1,..,n; n \geq 1\}$ este o mulțime triunghiulară pe R^{K_n+J} variabile aleatorii de prim-rang, unde $\bar{Z}_{i,n} = (Z'_{i,n}, X'_{i,n})'$ cu $Z'_{i,n}, X'_{i,n}$ exprimă rândul i din matricele Z_n, respectiv X_n. Presupunem că:

$$K_n \to \infty \text{ si } n \to \infty \text{ astfel încât } \frac{K_n}{n} \to \alpha,$$

considerăm că α satisface condiția

$$0 \leq \alpha < 1.$$

De asemenea, $m_{1n} \nearrow \infty$, $n \to \infty$ și presupunem că există constantele $\underline{\mathrm{D}}_\lambda$ si $\overline{\mathrm{D}}_\lambda$, cu

where, y_{1n} and y_{2n} are vectors $n \times 1$ of observations of the two endogenous variables of the system. X_n is a matrix of $n \times J$ observations of exogenous variables J, including in the equation (1)

Z_n is a matrix $n \times K_n$ of instrumental variables observations K_n, or exogenous variables excluded from the equation (1)

u_n and v_n are $n \times 1$ vectors of random perturbations.

We consider $\eta_i = (u_i, v_i)'$, where u_i and v_i are components of random vectors $u_{n,}$, and v_n.

For the situation described will make the following assumptions

- We assume that $\pi = \pi_n = \frac{c_n}{b_n}$ for some sequences of positive sequential numbers $\{b_n\}$, increasing in n, and for some non-random sequences, $K_n \times 1$parameter vectors $\{c_n\}$.
- The second assumption it starts from the fact that $\{\bar{Z}_{i,n}: i = 1,..,n; n \geq 1\}$ a triangular array R^{K_n+J} valued random variables, where $\bar{Z}_{i,n} = (Z'_{i,n}, X'_{i,n})'$ with $Z'_{i,n}, X'_{i,n}$ showing row i from matrices Z_n, respectively X_n. Assuming that

$K_n \to \infty$ and $n \to \infty$ so that $\frac{K_n}{n} \to \alpha$, we consider that α satisfies

$$0 \leq \alpha < 1$$

For $m_{1n} \nearrow \infty$, $n \to \infty$ and assuming that the following constants exist $\underline{\mathrm{D}}_\lambda$ and $\overline{\mathrm{D}}_\lambda$, with

[1] Acest aspect a fost tratat sintetic şi în articolul „*Unele elemente privind normalitatea estimatorilor bazaţi pe ecuaţie unică*", publicat în Revista Română de Statistică-Supliment nr. 2/2016, pp. 23-27, fiind o extensie a acestuia./ This aspect was synthetically approached in the article „*Unele elemente privind normalitatea estimatorilor bazaţi pe ecuaţie unică*", published in Romanian Statistical Review -Supplement no. 2/2016, pp. 23-27, being an extension of it.

$0 < \underline{D}_\lambda \leq \overline{D}_\lambda < \infty$ astfel, încât:

$\underline{D}_\lambda \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_{\min}\left(\frac{\bar{Z}_n'\bar{Z}_n}{m_{1n}}\right)$ cu probabilitate ridicată (3)

şi

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{\bar{Z}_n'\bar{Z}_n}{m_{1n}}\right) \leq \overline{D}_\lambda$ cu probabilitate ridicată (4)

unde $\bar{Z}_n = (Z_n, X_n)$

Vom considera în continuare că există șirul de numere pozitive reale $\{m_{2n}\}$, nedescrescătoare în n, şi $0 < \underline{D}_c \leq \overline{D}_c < \infty$, astfel, încât $\underline{D}_c \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} (\frac{c_n' c_n}{m_{2n}})$ şi (5)

$\overline{\lim}_{n\to\infty} (\frac{c_n' c_n}{m_{2n}}) \leq \overline{D}_c.$ (6)

A treia ipoteză denotă că $\bar{Z}_n$ si η_i sunt independente pentru orice valoare a lui i şi n.

În continuare, vom emite ipoteza că:

$-\eta_i \equiv i.i.d.(0,\Sigma), unde\ \Sigma > 0$ şi $\Sigma\begin{pmatrix}\sigma_{uu} & \sigma_{vu}\\ \sigma_{vu} & \sigma_{vv}\end{pmatrix}$

− Există o constantă D_η cu $0 < D_\eta < \infty$, astfel, încât $\max\{E(u_i^8),\ E(v_i^8)\} \leq D_\eta$.

$-E(u_i^3) = E(v_i^3) = E(u_i^2 v_i) = = E(u_i v_i^2) = 0.$

Ultima ipoteză pleacă de la faptul că vom considera aprioric raportul $r_n = \frac{m_{1n}m_{2n.}}{b_n^2}$ cu condiţia ca $n \to \infty, r_n \to \infty$ astfel, încât $\frac{r_n}{K_n} \to 0$, dar $\frac{\sqrt{K_n}}{r_n} \to 0$.

3. Normalitatea în cazul estimatorilor unei ecuații singulare[1]

Ne vom concentra atenția asupra a trei estimatori:

- Estimatorul LIML (Limited information maximum likelihood), de forma:

$0 < \underline{D}_\lambda \leq \overline{D}_\lambda < \infty$ so that:

$\underline{D}_\lambda \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_{\min}\left(\frac{\bar{Z}_n'\bar{Z}_n}{m_{1n}}\right)$ with high probability (3)

and

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{\bar{Z}_n'\bar{Z}_n}{m_{1n}}\right) \leq \overline{D}_\lambda$ with high probability (4)

where $\bar{Z}_n = (Z_n, X_n)$

Next we will consider that it exists the string of positive real numbers $\{m_{2n}\}$, increasing n, and $0 < \underline{D}_c \leq \overline{D}_c < \infty$, so that

$\underline{D}_c \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} (\frac{c_n' c_n}{m_{2n}})$ and (5)

$\overline{\lim}_{n\to\infty} (\frac{c_n' c_n}{m_{2n}}) \leq \overline{D}_c.$ (6)

The third assumption $\bar{Z}_n$ and η_i is independent for any i and n.

Next we shall assume that:

$-\eta_i \equiv i.i.d.(0,\Sigma), where\ \Sigma > 0$ and $\Sigma\begin{pmatrix}\sigma_{uu} & \sigma_{vu}\\ \sigma_{vu} & \sigma_{vv}\end{pmatrix}$

− Exist a constant D_η with $0 < D_\eta < \infty$, so that $\max\{E(u_i^8),\ E(v_i^8)\} \leq D_\eta$.

$-E(u_i^3) = E(v_i^3) = E(u_i^2 v_i) =$

$= E(u_i v_i^2) = 0.$

The last hypothesis is based on the fact that we consider a priori the relation $r_n = \frac{m_{1n}m_{2n.}}{b_n^2}$ with the condition that $n \to \infty, r_n \to \infty$ so $\frac{r_n}{K_n} \to 0$, but $\frac{\sqrt{K_n}}{r_n} \to 0$.

3. Normality in the case of estimators of a singular equation[1]

We have three estimators:

- Estimator LIML (Limited information maximum likelihood):

[1] Aspectele tratate în această secţiune au fost prezentate şi în contextul articolului „*Unele elemente privind normalitatea estimatorilor bazaţi pe ecuaţie unică*”, publicat în Revista Română de Statistică-Supliment nr. 2/2016, pp. 23-27, în ideea de a completa şi argumenta demonstraţia prezentată şi concluziile care s-au desprins în final./ The aspects treated in this section were also presented in the context of the article „*Unele elemente privind normalitatea estimatorilor bazaţi pe ecuaţie unică*”, published in the Romanian Statistical Review-Supplement, no. 2/2016, pp. 23-27, in the scope of development and argumentation on the demonstration presented and the conclusions drawn at the end.

$$\hat{\beta}_{LIML,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n}\text{-}\hat{\lambda}_{LIML,n}y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{2n})^{-1} \times (y'_{2n}M_{X_n}y_{1n}\text{-}\hat{\lambda}_{LIML,n}y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{1n})\ , \quad (7)$$

unde $\hat{\lambda}_{LIML,n}$ este rădăcina cea mai mică a ecuației determinante:

where $\hat{\lambda}_{LIML,n}$ the smallest root of the determined equation:

$$\det\left\{\begin{pmatrix} y'_{1n}M_{X_n}y_{1n} & y'_{1n}M_{X_n}y_{2n} \\ y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} & y'_{2n}M_{X_n}y_{2n}\end{pmatrix} - \lambda_n \begin{pmatrix} y'_{1n}M_{\overline{Z}_n}y_{1n} & y'_{1n}M_{\overline{Z}_n}y_{2n} \\ y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{1n} & y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{2n}\end{pmatrix}\right\} = 0 \quad (8)$$

- Estimatorul LIML modificat Fuller (FLIML), obţinut din ecuaţia:

- Estimator LIML modified Fuller (FLIML):

$$\hat{\beta}_{FLIML,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} - \hat{k}_{FLIML,n}y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{2n})^{-1} \times (y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} - \hat{k}_{FLIML,n}y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{1n}) \quad (9)$$

unde $\hat{k}_{FLIML,n}$=$\hat{\lambda}_{LIML,n} - \frac{a}{n-K_n-J}$, pentru o constantă pozitivă.

where $\hat{k}_{FLIML,n}$=$\hat{\lambda}_{LIML,n} - \frac{a}{n-K_n-J}$, for a positive constant

- Estimatorul B2SLS (Bias) se obţine din ecuaţia:

- Estimator B2SLS (Bias – corrected two-stage least-squares):

$$\hat{\beta}_{B2SLS,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} - \left(\frac{n}{n-K_n+2}\right)y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{2n})^{-1} \times$$
$$\times \left(y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} - \left(\frac{n}{n-K_n+2}\right)y'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{1n}\right). \quad (10)$$

Toți acești 3 estimatori sunt excepţii ale estimatorului de clasă k definit prin:

All these 3 estimators are special cases of the k class estimator definite by:

$$\hat{\beta}_{k,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} - ky'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{2n})^{-1}(y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} - ky'_{2n}M_{\overline{Z}_n}y_{1n}) \quad (11)$$

Următoarele teoreme prezintă principalele rezultate asimptotice ale acestei lucrări:

Fie $\hat{\beta}_{LIML,n}$ definit ca prin ecuația (7). Atunci, sub ipotezele unu şi cinci avem:

The following theorem shows the main asymptotic results of this work:

Let $\hat{\beta}_{LIML,n}$ be defined in equation (7). Then in hypothesis one and five we have:

$$\left(\frac{\psi_n}{\sigma_{L,n}}\right)(\hat{\beta}_{LIML,n} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty, \text{ unde } \psi_n = b_n^{-2}c'_nZ'_nM_{X_n}Z_nc_n$$

Fie $\hat{\beta}_{FLIML,n}$ definit ca în ecuația (9). Atunci, sub aceleaşi ipoteze rezultă:

Let $\hat{\beta}_{FLIML,n}$ be definite in equation (9). Then in hypothesis one and five we have:

$$\left(\frac{\psi_n}{\sigma_{L,n}}\right)(\hat{\beta}_{FLIML,n} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty.$$

Fie $\hat{\beta}_{B2SLS,n}$ definit ca în ecuația (10). Atunci, sub ipotezele considerate rezultă:

Let $\hat{\beta}_{B2SLS,n}$ definite in equation (10). Then in hypothesis we have:

$$\left(\frac{\psi_n}{\sigma_{L,n}}\right)(\hat{\beta}_{B2SLS,n} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty,$$

Având expunerea de mai sus, apreciind că cele cinci ipoteze sunt îndeplinite şi $\eta_i \sim E_2(0,\Theta)$, unde $\Theta = \tau\sum$ pentru o constantă pozitivă τ și $E_2(0,\Theta)$, atunci, există un număr întreg pozitiv N astfel, încât pentru orice $n \geq N$ se verifică relaţia: $\sigma_{B,n}^2 > \sigma_{L,n}^2$

Suppose that the all assumptions are fulfilled and $\eta_i \sim E_2(0,\Theta)$, where $\Theta = \tau\sum$ for a positive constant τ and $E_2(0,\Theta)$. Then there is a positive integer N so than for any $n \geq N$: $\sigma_{B,n}^2 > \sigma_{L,n}^2$

Vectorul aleatoriu X de $m \times 1$ se spune că are o distribuție eliptică cu parametrii $\mu(m \times 1)$ si $\Theta(m \times m)$, dacă funcția de densitate are forma:

Random vector X of $m \times 1$ is said to have an elliptical distribution with parameters $\mu(m \times 1)$ and $\Theta(m \times m)$ if density function has the form:

$$k_m(det\Theta)^{-\frac{1}{2}}h((x-\mu)'\Theta^{-1}(x-\mu)), \text{ iar/ but}$$

constanta normalizată k_m și funcția $h(\cdot)$, conduc la Θ definit pozitiv.

for constant normalizedk_m and function $h(\cdot)$, where Θ is positively definite.

$$\text{If } G_n = P_{\bar{Z}_n} - P_{X_n} - (\frac{K_n}{n-K_n-J})M_{\bar{Z}_n}$$

Iar $g_{jj,n}$ şi $g_{ij,n}$ elementul j de pe diagonala matricei G_n şi (i,j), elementele din afara diagonalei matricei, sub incidenţa ipotezei doi, punctele unu şi doi, există următoarele relaţii dacă $n \to \infty$.

And $g_{jj,n}$, $g_{ij,n}$ the j element on the matrix diagonal G_n and (i,j) elements found off-diagonal matrix. So, under hypothesis 4.2(a) and 4.2(b), the following statements are met when $n \to \infty$.

$$- Tr(G_n^4) = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij,n}^4 = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{1\le i\le n}[\sum_{1\le j<k\le n} g_{ij,n}^2\, g_{ik,n}^2] = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{1\le i<j\le n} g_{ii,n}^2\, g_{ij,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{1\le i<j\le n} g_{jj,n}^2\, g_{ij,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le n} g_{ij,n}^2\, g_{ik,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le n} g_{ij,n}^2\, g_{jk,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le n} g_{ik,n}^2\, g_{jk,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- Tr(G_n^2) = O_{a.s.}(K_n)$$

$$- \sum_{j=1}^{n} g_{jj,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$
$$- \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij,n}^2 = O_{a.s.}(K_n)$$

În cazul în care G_n şi $g_{jj,n}$ şi $g_{ij,n}$ definite anterior, atunci, sub ipotezele doi, punctele unu şi doi, cu condiţia ca $n \to \infty$, deduce relaţia:

If $G_n$and $g_{jj,n}$ and $g_{ij,n}$ defined before, then under the hypothesis 2, points 1 and 2, with condition $n \to \infty$ gives us the relation:

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (E(g_{ij,n}^2)^2 = O(K_n) \text{ si } \sum_{1 \le i < j < k \le n} E(g_{ij,n}^2) E(g_{ik,n}^2) = O(K_n).$$

Considerând în continuare G_n definit și fie $g_{jj,n}$ si $g_{ij,n}$ elementul j de pe diagonala matricei G_n, respectiv elementul (i, j) din afara diagonalei matricei, atunci, sub ipotezele doi, punctele doi şi patru când $n \to \infty$

Let us consider G_n defined and let $g_{jj,n}$ and $g_{ij,n}$ be the j element on the matrix diagonal G_n, respectively the element (i, j) from off-diagonal matrix. Then under the hypothesis 2, points 2, 4 when $n \to \infty$

$$\frac{1}{K_n^2} \sum_{1 \le i < j < k \le n} E(g_{ik,n} g_{jk,n} g_{il,n} g_{jl,n}) = o(1)$$

De asemenea, ipotezele unu şi cinci conduc la relaţia:

$b_n^{-1} K_n^{-1/2} c_n' Z_n' M_{X_n} u_n \xrightarrow{p} 0$ cand $n \to \infty$.

În final, vom considera $\{X_{i,n}, F_{i,n}, 1 \le i \le l_n, n \ge 1\}$ o matrice pătratică şi integrabilă, de diferențe martingale. De asemenea, dacă $l_n \nearrow \infty$, $n \to \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$, obţinem relaţiile:

Hypothesis one and five lead to $b_n^{-1} K_n^{-1/2} c_n' Z_n' M_{X_n} u_n \xrightarrow{p} 0$ when $n \to \infty$.

In the end we shall consider that $\{X_{i,n}, F_{i,n}, 1 \le i \le l_n, n \ge 1\}$ a square array, integrated, of martingale differences. Also, let $l_n \nearrow \infty$, $n \to \infty$, we suppose that for any $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{l_n} E[X_{i,n}^2 \mathrm{I}(|X_{i,n}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{i-1,n}] \xrightarrow{p} 0$$

și/ and

$$\sum_{i=1}^{l_n} E[X_{i,n}^2 | \mathcal{F}_{i-1,n}] \xrightarrow{p} 1$$

În concluzie, se deduce,

$\sum_{i=2}^{l_n} X_{i,n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

In conclusion we have,

$\sum_{i=2}^{l_n} X_{i,n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

4. Concluzii

Derivând limitele distribuțiilor estimatorilor, se presupune că acestea vor creşte cu o rată mai redusă decât a numărului de instrumente.

4. Conclusions

By derivating the limits for the estimators' distribution, it is assumed that these limits will increase by a rate which is lower than the number

Aceasta presupune că estimatorii consideraţi, fiind definiţi prin configurarea unor elemente sensibile, înseamnă că generează o creştere moderată.

Rezultatele obţinute evidenţiază că se poate lucra cu instrumente mai sensibile, neexistând riscul ca acestea să difere de valoarea estimată.

În cazul instrumentelor sensibile, se constată că estimatorii, indiferent de gradul lor, sunt echivalenți. Deși este un caz particular, putem trage concluzia că normalitatea asimptotică pentru estimatorii ecuației singulare, în cazul unei populații cu instrumente sensibile, este verificată. Studiul prezentat evidențiază că, în utilizarea estimatorilor ecuațiilor singulare, atunci când se aplică unor populații cu instrumente, ratele de convergență și varianță diferă de situația instrumentelor puternice.

of instruments. This facts assumes that the estimators considered, defined through the configuration of some sensitive elements, mean a given moderate increase.

The results achieved emphasize that the more sensitive instruments can be worked with, the risk that they differ from the estimated value is non-existent.

In the case of sensitive instruments, it is observed that the estimators are equivalent, regardless their grade. Even if it's a particular case, we can conclude that the asymptotic normality for the estimators of the singular equation, in the case of a population with sensitive instruments, is verified. The present study outlines that in the use of singular equations estimators, when applied to population with instruments, the convergence and variance rates differ from the situation of strong instruments.

Bibliografie selectivă/ Selective bibliography:

1. ANDERSON, T.W. et.al.(2008). *On the Asymptotic Optimality of the LIML Estimator with Possibly Many Instruments*, CIRJE, Faculty of Economics, University of Tokyo in CIRJE F-Series with number CIRJE-F-542
2. ANGHELACHE, C., SACALĂ, C., BODO, G., ANGHEL, M.G. (2016). *Unele elemente privind normalitatea estimatorilor bazaţi pe ecuaţie unică*, Revista Română de Statistică-Supliment nr. 2/2016, pp. 23-27
3. ANGHELACHE, C. (2008). *Tratat de statistică teoretică şi economică*, Editura Economică, Bucureşti
4. ANGHELACHE, C. (2016). *Econometrie teoretică*, Editura Artifex, Bucureşti
5. ANGHELACHE, C., ANGHEL, M.G., MANOLE, A. (2014). *Modelare economică, financiar-monetară şi informatică,* Editura Artifex, Bucureşti
6. FORCHINI, G.(2006). *The Asymptotic distribution of the LIML Estimator in a Partially Identified Structural Equation*, Monash Econometrics and Business Statistics Working Papers 1/06, Monash University, Department of Econometrics and Business Statistics
7. KUNITOMO, N. et.al.(2010). *An Aysmptotically Optimal Modification of the Panel LIML Estimation for Individual Heteroscedasticity*, CIRJE, Faculty of Economics, University of Tokyo in its series CIRJE F-Series with number CIRJE-F-780
8. TCHUENTE, G., CARRASCO, M. (2013). *Regularized LIML for many instruments*, CIRANO in CIRANO Working Papers with number 2013s-20