DOI: https://doi.org/10.53486/sstc.v3.32
CZU: 517.95:330.4

APPLICATIONS OF PARTIAL DERIVATIVES IN ECONOMIC. LOCAL EXTREMA

APLICAȚII ALE DERIVATELOR PARȚIALE ÎN ECONOMIE. EXTREMUL LOCAL

HAREA Ruxanda, studentă, Specialitatea: CON,
Academia de Studii Economice din Moldova
Republica Moldova, Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61,
e-mail autor: harea.ruxanda@gmail.com

Abstract. *Mathematical optimization deals with selecting the best element from a set of available alternatives. This means solving problems in which the extremes (maximum or minimum) of a real function are sought. The topic of this article is relevant, due to the fact that it can be applied in various economic domains, especially in solving business-related problems. The research is based on mathematical concepts and how they can be applied to solve real problems.*

Key words: *partial derivatives, local extrema, function, multiple variables, maximum*

JEL CLASSIFICATION: A12, C02, C30.

INTRODUCERE

Optimizarea matematică se ocupă cu selectarea celui mai bun element dintr-o mulțime de alternative disponibile. Acest lucru înseamnă rezolvarea unor probleme în care se caută extremele (maximul sau minimul) unei funcții reale.

O afacere care are constrângeri de resurse poate folosi optimizarea matematică pentru a găsi cea mai eficientă modalitate de utilizare și implementare a acestor resurse. Scopul devine maximizarea eficienței operaționale și deblocarea de noi oportunități de afaceri. [1] Practic, pentru o companie, este important de anticipat câștigurile pe baza unor parametri, cum ar fi salariile angajaților, costul materiilor prime etc. Cu ajutorul unei funcții, este posibil de obținut combinația optimă care va maximiza profiturile.

Obiective. Obiectivele principale ale acestei cercetări sunt axate pe demonstrarea aportului derivatelor parțiale, în cadrul funcțiilor de mai multe variabile, la rezolvarea problemelor legate de economie. Analiza prezentată în acest articol se va concentra preponderent pe accentuarea rolului extremului local.

CONȚINUTUL DE BAZĂ

Analiză succintă a surselor bibliografice în domeniul problemei cercetate. În scopul atingerii obiectivelor preconizate, a fost realizată o analiză a literaturii de specialitate. Studierea manualelor și cărților a oferit aprofundarea necesară cercetării, în care s-au regăsit exemple practice care să o solidifice. Astfel, am analizat lucrări publicate de autori autohtoni (precum: Bunu I., Bunu M., Balcan V., Berzan R., Chicu, O., Tacu M.), dar și de peste hotare (precum: Rusu G., Spînu M., Tan Soo T.)

Descrierea metodelor de cercetare utilizate. Pentru a reuși o analiză aprofundată a subiectului dat, s-a utilizat o metodă de cercetare calitativă, cu ajutorul căreia să se poată demonstra

ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

rolul economic al derivatelor parțiale, care se utilizează în calculul și analiza matematică. În acest scop, modul de atestare a acestui obiectiv este prin exemplificare aplicată.

Este important de cunoscut faptul că, în rezolvarea problemelor, pentru a reuși determinarea punctului de maxim, care reprezintă soluția optimă în cazurile ce urmează, ambele derivate parțiale trebuie să fie egale cu 0.

Apare și condiția ca determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x\,,y) & f''_{xy}(x\,,y) \\ f''_{xy}(x\,,y) & f''_{yy}(x\,,y) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x\,,y) \times f''_{yy}(x\,,y) - [f''_{yy}(x\,,y)]^2$ să fie mai mare decât 0 și $f''_{xx}(x\,,y)$ mai mic decât 0. [2]

Exemplul 1. Întreprinderea își vinde producția pe două piețe, în cantitățile x și y. Funcțiile-venit pe fiecare piață sunt: $V_1(x) = 11x - x^2 - 10$ și $V_2(x) = 14y - y^2 - 24$.

Costul total al mărfii este $C(x, y) = x^2 + x + y^2$, iar funcția profitului:

$P(x, y) = V_1(x) + V_2(y) - C(x, y) = 11x - 2x^2 + 14y - 2y^2 - xy - 24$. Se cere ca întreprinderea să-și maximizeze profitul $P(x, y)$.

Primul pas este aflarea derivatelor parțiale.

1. $P'_x = 11 - 4x - y$, $P'_y = 14 - 4y - x$

Sistemul de ecuații $\begin{cases} 11 - 4x - y = 0 \\ 14 - 4y - x = 0 \end{cases}$ posedă o singură soluție $x = 2$, $y = 3$. Prin urmare, punctul critic al funcției $P(x\,,y)$ este $M_0(2; 3)$.

$P''_{xx} = -4$, $P''_{xy} = -1$, $P''_{yy} = -4$.

Întrucât $P''_{xx} = -4 < 0$ și $\Delta(M_0) = 15 > 0$, rezultă că punctul $M_0(2; 3)$ este punct de maxim local al funcției $P(x\,,y)$.

Deci soluția optimă pentru întreprindere este de a scoate pe prima piață 2 unități de marfă, iar pe a doua 3 unități de marfă. [2]

Exemplul 2. Venitul total săptămânal (în dolari) pe care întreprinderea Acrosonic îl realizează prin producerea și vânzarea sistemelor sale de difuzoare pentru rafturi este exprimat prin:

$$V(x\,,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y$$

unde x reprezintă numărul de unități complet asamblate și y reprezintă numărul de truse produse și vândute în fiecare săptămână. Costul total săptămânal atribuit producției acestor difuzoare este exprimat prin:

$$C(x\,,y) = 180x + 140y + 5000$$

dolari, unde x și y au aceeași semnificație ca înainte. Determinați câte unități asamblate și câte kituri Acrosonic ar trebui să producă pe săptămână pentru a-și maximiza profitul.

Contribuția la profitul săptămânal al Acrosonic care rezultă din producția și vânzarea sistemelor de difuzoare pentru rafturi este exprimată prin:

$P(x\,,y) = V(x\,,y) - C(x\,,y) = (-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y) - (180x + 140y + 5000) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$.

Calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi pentru a afla x și y.

$$P'_x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 = 0,\ P'_y = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 = 0$$

De unde, $y = -2x + 480$. Substituind în a doua ecuație obținem $x = 240$. Respectiv, $y = 64$.

Prin urmare, funcția P are singurul punct critic (208; 64). Pentru a arăta că punctul (208; 64) este o soluție a problemei noastre, folosim derivata a doua.

$P''_{xx} = -\frac{1}{2}$, $P''_{xy} = -\frac{1}{4}$, $P''_{yy} = -\frac{3}{4}$. Calculăm Δ: $\Delta(x\,,y) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}) - (-\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

Lucrări științifice ale Simpozionului Ştiinţific al Tinerilor Cercetători, Ediția a XXI-a
7-8 aprilie 2023, Chişinău, Republica Moldova
ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

Deoarece $P''_{xx} = -\frac{1}{2} < 0$ și $\Delta(208; 64) = \frac{5}{16} > 0$, rezultă că punctul (208; 64) este punct de maxim local al funcției *P*. Acest punct de maxim este și maximul absolut al lui *P*.
Deci, Acrosonic își poate maximiza profitul săptămânal prin fabricarea a 208 unități asamblate și a 64 de kituri ale sistemelor lor de difuzoare pentru rafturi. Profitul maxim săptămânal realizabil din producția și vânzarea acestor sisteme de difuzoare este exprimat prin: $P(208; 64) = -\frac{1}{4}(208)^2 - \frac{3}{8}(64)^2 - \frac{1}{4}(208)(64) + 120(208) + 100(64) - 5000 = 10680$ sau \$10680. [3]

Exemplul 3. O firmă monopolistă își vinde produsele cu diferite prețuri pe două piețe. Funcțiile cererii sunt următoarele: $x_1 = 30 - 0{,}2p_1$ și $x_2 = 50 - 0{,}4p_2$, unde p_1 și p_2 semnifică prețurile, iar x_1 și x_2 reprezintă cantitățile. Costul este exprimat prin: $C(x, y) = 15x + 900$. Scopul este de a afla prețurile care vor aduce profit maxim întreprinderii.
Pentru început, determinăm venitul companiei, înmulțind cantitatea și prețul.
$V_1(x, y) = x_1 p_1 = p_1(30 - 0{,}2p_1) = 30p_1 - 0{,}2p_1^2$
$V_2(x, y) = x_2 p_2 = p_2(50 - 0{,}4p_2) = 50p_2 - 0{,}4p_2^2$
$C(x, y) = 15x + 900 = 15(x_1 + x_2) + 900 = 15(30 - 0{,}2p_1 + 50 - 0{,}4p_2) = 450 - 3p_1 + 750 - 6p_2 + 900 = 2100 - 3p_1 - 6p_2$. De aici, profitul se va determina astfel:
$P(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y) - C(x, y) = 30p_1 - 0{,}2p_1^2 + 50p_2 - 0{,}4p_2^2 - 2100 + 3p_1 + 6p_2 = 33p_1 + 56p_2 - 0{,}2p_1^2 - 0{,}4p_2^2 - 2100$.
Calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi:
$P'_{p1} = 33 - 0.4p_1 = 0$, $P'_{p2} = 56 - 0.8p_2 = 0$. De unde $0.4p_1 = 33$; $p_1 = 82{,}5$, iar $0{,}8p_2 = 56$; $p_2 = 70$.
Funcția $P(x, y)$ are un punct critic – (82,5;70). Pentru a fi asigurați că acesta este și soluția optimă, vom calcula derivatele de ordinul doi și determinantul.
$P''_{p1p1} = -0{,}4$, $P''_{p1p2} = 0$, $P''_{p2p2} = -0{,}8$. Calculăm Δ: $\Delta(x, y) = (-0{,}4)(-0{,}8) - 0 = 0{,}32 > 0$.
Deoarece $P''_{p1p1} = -0{,}4 < 0$ și $\Delta(82{,}5; 70) = 0{,}32 > 0$, rezultă că punctul (82,5; 70) este punct de maxim al funcției *P*. Deci, firma va atinge profitul maxim dacă va vinde la prețurile 82,5 și 70.
Pentru extindere, rezultatele se vor înlocui în funcția profitul, și profitul va fi de 1221,45.

Rezultate obținute. Cu ajutorul exemplelor aplicate este reiterat faptul că extremele funcțiilor mai multor variabile sunt importante în numeroase aplicații în economie și afaceri. Variabilele cu semnificație deosebită sunt profitul, venitul și costul.

CONCLUZII/RECOMANDĂRI

În orice domeniu de activitate, în special cel economic, se pune problema riscurilor ce pot distorsiona activitatea. În problemele economice, extremul local joacă un rol important în aflarea punctului de maxim unde o întreprindere poate realiza maximizarea profitului său. Cu ajutorul calculelor matematice, orice antreprenor își poate analiza situația financiară și să observe când compania în care investește aduce profit sau stagnează. În același context, punctul de minim este la fel de esențial. Atunci când întreprinzătorul va dori să își îmbunătățească utilajul sau să găsească noi surse de materie primă, este fundamental ca acesta să opteze pentru variantele care îi vor aduce costuri minime. Valorile maxime și minime ale funcției de profit total pot fi folosite pentru a se forma o idee despre limitele pe care compania trebuie să le pună salariilor angajaților, pentru a nu intra în pierdere.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE:

1. FOOTE, K. D. *Making Business Decisions with Mathematical Optimization*. 28 April 2021. Web. Disponibil: https://www.dataversity.net/making-business-decisions-with-mathematical-optimization/ (accesat: 10.03.2023)

ISBN 978-9975-180-07-8, DOI: 10.53486/sstc.v3

2. BUNU, I., BUNU, M., BALCAN, V., BERZAN, R., CHICU, O., CHIRCU, P., POSTOLACHE, M. *Matematici economice*. Chișinău: Editura ASEM, 2012, 319 p., Manual.
3. TAN, Soo T. *Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences*. Belmont, California: Cengage Learning, 2012, 892 p., Textbook

Coordonator științific: TACU Mariana, lector universitar,
Academia de Studii Economice din Moldova
Republica Moldova, Chișinău, str. Bănulescu-Bodoni 61,
e-mail: tacu.mariana@ase.md